

1. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$ 에 의하여 직선 $2x + y + 5 = 0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x + y + 1 = 0$ ② $2x + y + 2 = 0$ ③ $2x + y + 6 = 0$

④ $2x + y + 8 = 0$ ⑤ $2x + y + 9 = 0$

해설

$x' = x - 2$, $y' = y + 1$ 이라 하자.

x, y 를 원래 식에 대입하면,

$$2(x' + 2) + (y' - 1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x' + y' + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y + 8 = 0$$

2. 직선 $x-2y+4=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

- ① $x+2y+4=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x-2y-4=0$
④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ 를 대입한다.

3. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동하려면 x 축 방향으로 +5, y 축 방향으로 +15만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a = 5$, $b = 15$

4. 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

- ① $(-1, -1)$, $2\sqrt{3}$ ② $(0, 0)$, $3\sqrt{3}$ ③ $(1, 1)$, $4\sqrt{3}$
④ $(2, 2)$, $5\sqrt{3}$ ⑤ $(3, 3)$, $6\sqrt{3}$

해설

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$
 $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12$
 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 12$
이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$ 이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,
중심의 좌표는 $(-3 + 2, 2 - 3) = (-1, -1)$ 이고,
반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

5. 직선 $2x + ay + b = 0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x + 2y - 6 = 0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -16 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

해설

직선 $2x + ay + b = 0$ 을
 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,
 $2(x + 3) + a(y - 1) + b = 0$
 $2x + ay - a + b + 6 = 0 \cdots \textcircled{1}$
즉, 직선 $\textcircled{1}$ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,
 x 절편은 $\frac{a - b - 6}{2}$ 이다.
이 때, 직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $3x + 2y - 6 = 0$,
즉 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 과 x 절편이 같고
서로 직교하므로
(i) $\frac{a - b - 6}{2} = 2$
 $\therefore a - b = 10$
(ii) $-\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \quad \therefore a = -3$
따라서 (i), (ii)에서 $a = -3$, $b = -13$ 이므로
 $a + b = -3 + (-13) = -16$

6. 직선 l 을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼, y 축의 양의 방향으로 -1 만큼 평행이동 시켰더니 $x - 2y - 1 = 0$ 와 겹쳤다. 직선 l 의 방정식은?

- ① $x + y - 1 = 0$ ② $x - 2y + 3 = 0$ ③ $2x + y - 1 = 0$
④ $x - y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y + 7 = 0$

해설

거꾸로 $x - 2y - 1 = 0$ 을 x 축으로 -2 , y 축으로 $+1$ 이동시키면, 직선 l 과 겹치게 된다.

$$\Rightarrow (x + 2) - 2(y - 1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y + 3 = 0 \quad \cdots \quad l$$

7. 좌표평면 위의 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다.
- 점 $\left(\frac{a}{b}, a + b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?
- ① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

해설

점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a, -b)$ 이고,
이 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b, a)$ 이다.

즉, 점 $(-b, a)$ 가 제4 사분면의 점이므로

$$-b > 0, a < 0 \quad \therefore a < 0, b < 0$$

따라서 $\frac{a}{b} > 0, a + b < 0$ 이므로 점 $\left(\frac{a}{b}, a + b\right)$ 는 제4사분면에 존재한다.

제4사분면에 존재한다.

8. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①은 원 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로

두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의

중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

9. 두 포물선 $y = x^2 - 6x + 10$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 가 점 P 에 대하여 대칭일 때, 점 P 의 좌표는?

- ① $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0, 2)$
④ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

$$y = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x^2 + 2x - 5 = -(x - 1)^2 - 4 \cdots \textcircled{2}$$

포물선 ①, ②의 꼭짓점의 좌표는

각각 $(3, 1)$, $(1, -4)$ 이고

두 포물선이 점 P 에 대하여 대칭이므로

점 P 는 두 포물선의 꼭짓점의 중점이다.

$$\frac{3+1}{2} = 2, \quad \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$$

따라서, 점 P 는 $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

10. P (3, 1)을 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q (α , β)라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값은?

① 1 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

직선 PQ가 $x + y + 1 = 0$ 에 수직이므로

가울기는 1이다.

$$\frac{\beta - 1}{\alpha - 3} = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

점 P, Q의 중점 $\left(\frac{\alpha + 3}{2}, \frac{\beta + 1}{2}\right)$ 이 직선

$x + y + 1 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{\alpha + 3}{2} + \frac{\beta + 1}{2} + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = -2$, $\beta = -4$

따라서 $\alpha + \beta = -6$ 이다.

11. 두 점 A(-6, 1), B(2, 5) 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로

$\overline{AB}$ 의 중점 (-2, 3) 은 직선

$y = ax + b$ 위에 있다.

$$\therefore 3 = -2a + b \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가

서로 수직이므로

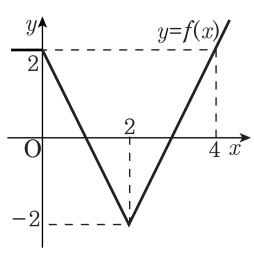
($\overline{AB}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서

$$\frac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$$

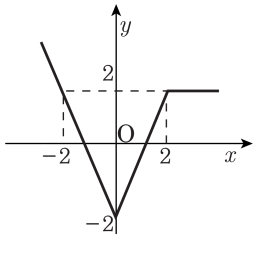
$\therefore a = -2$ $a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = -1 \therefore a + b = -3$$

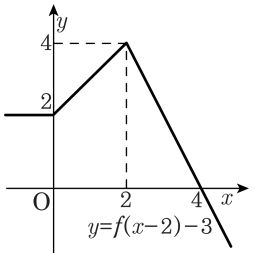
12. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2-x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



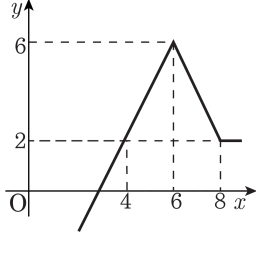
①



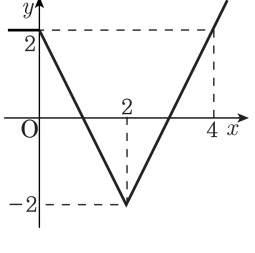
②



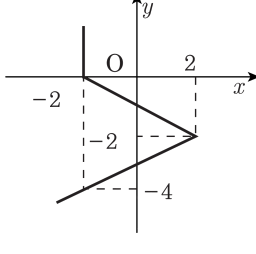
③



④



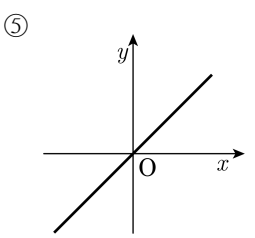
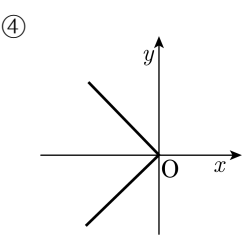
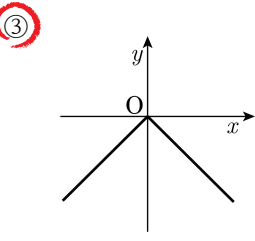
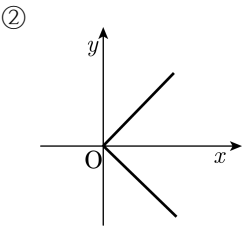
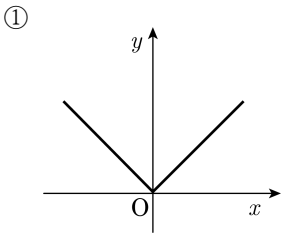
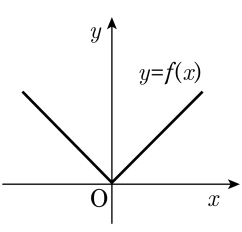
⑤



해설

$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
 따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에
 대하여 대칭이동한 것이다.
 그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면
 ① 과 같다.

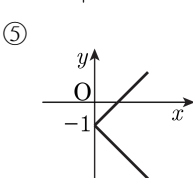
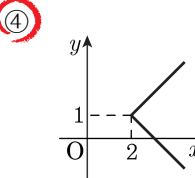
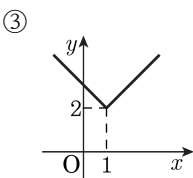
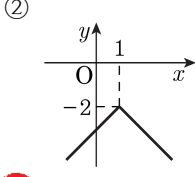
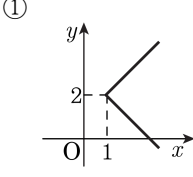
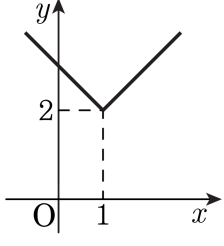
13. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



해설

$y = -f(-x)$, 즉 $-y = f(-x)$ 는 $y = f(x)$ 에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서, $y = -f(-x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

14. 방정식 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형이 아래 그림과 같을 때, 다음 중 방정식 $f(y,x) = 0$ 이 나타내는 도형은?



해설

도형 $f(x,y) = 0$ 을 $y = x$ 에 대해 대칭이동하면 $f(y,x) = 0$ 이 된다.
따라서 (1, 2) 는 (2, 1) 로 이동되며,
도형 전부를 대칭이동하면 4 번의 그림이 된다.

15. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

- ① $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ ㉡ $x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ④ $(x + 1)^2 + y^2 = 2$
⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면

반지름의 길이가 같아야 한다.

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은

반지름의 길이가 1인 ㉡이다.

16. 점 $P(a, b)$ 의 직선 $y = 2x$ 에 대한 대칭점을 Q, 점 Q 를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점을 R 이라 하면 두 점 R 과 P 가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, $3a + b$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ 5

해설

$Q = (X, Y)$ 라 할 때, $\overline{PQ}$ 는 $y = 2x$ 에 수직하고,
P, Q 의 중점은 $y = 2x$ 위에 존재한다.

$$\Rightarrow \frac{Y-b}{X-a} \times 2 = -1, \quad \frac{Y+b}{2} = 2 \times \frac{X+a}{2}$$

$$\text{두 식을 연립하면, } X = \frac{4b-3a}{5}, \quad Y = \frac{4a+3b}{5}$$

이제 Q 를 x 축으로 1 평행이동 시키면,

$$R = \left(\frac{4b-3a+5}{5}, \frac{4a+3b}{5} \right)$$

R 과 P 가 $y = x$ 대칭이므로,

$$\frac{4b-3a+5}{5} = b, \quad \frac{4a+3b}{5} = a$$

정리하면 $3a + b = 5, \quad a = 3b$

$$\text{두 식을 연립하면, } a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 3a + b = 5$$

17. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y = mx$ 에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

- ① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동시키면
 $(-x)^2 + y^2 - 6(-x) - 4y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$
 $\therefore (x+3)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \dots\dots \textcircled{1}$
이때, $\textcircled{1}$ 이 직선 $mx - y = 0$ 에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$ 사이의
거리는 2이어야 한다.
 $\therefore, \frac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$
 $9m^2 + 12m + 4 = 4m^2 + 4$
 $\therefore 5m^2 + 12m = 0$
따라서, $m = 0$ 또는 $m = -\frac{12}{5}$ 이므로 그 합은 $0 + \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{5}$

18. 두 점 $A(-3, 6)$, $B(8, -1)$ 와 직선 $x + y + 1 = 0$ 이 있다. 이 직선 위의 점 P 에 대하여 $AP + BP$ 를 최소가 되게 하는 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A(-3, 6)$ 의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $A'(a, b)$ 라 하면

$$\frac{a-3}{2} + \frac{b+6}{2} + 1 = 0, a+b = -5 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AA'} \perp l$ 이므로, $\overline{AA'}$ 의 기울기는 1이다.

$$\frac{b-6}{a+3} = 1, a-b = -9 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 2a = -14, a = -7, b = 2$$

$$\therefore A'(-7, 2)$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \leq \overline{A'B}$$

즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이고,

이 때 점 P 는 A' , B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{A'B}$ 의 기울기는 $\overline{BP}$ 의 기울기와 같다.

$A'(-7, 2)$, $B(8, -1)$, $P(m, n)$ 에서

$$\frac{-1-2}{8-(-7)} = \frac{n+1}{m-8},$$

$$m+5n = 3 \cdots \textcircled{3}$$

점 P 는 직선 l 위에 있으므로, $m+n = -1 \cdots \textcircled{4}$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } m = -2, n = 1$$

$$\therefore P(-2, 1)$$

19. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$

② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$

④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{AB}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots \textcircled{1}$$

그리고 $\overline{AB}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m \left(\frac{a+c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b+d = m(a+c) \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$a-c = \frac{b+d}{a+c} (d-a)$$

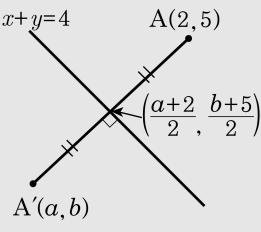
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

20. 두 점 A (2, 5), B (7, 0) 과 직선 $x + y = 4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $AP + BP$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

- ① $\sqrt{17}$, P (2, -1)
- ② $2\sqrt{17}$, P (3, 1)
- ③ $3\sqrt{17}$, P (5, 2)
- ④ $4\sqrt{17}$, P (4, 8)
- ⑤ $5\sqrt{17}$, P (1, 2)

해설

점 A (2, 5) 를 직선 $x + y = 4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $A' (a, b)$ 로 놓으면
선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ 는
직선 $x + y = 4$ 위에 있으므로



$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+5}{2} = 4$$

$$\therefore a + b = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AA' 은 $x + y = 4$ 와 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-2} \cdot (-1) = -1$$

$$\therefore a - b = -3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

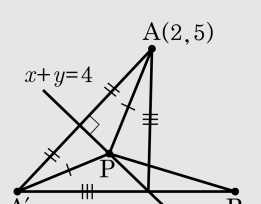
①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 2$$

$$\therefore A' (-1, 2)$$

이때, 다음 그림에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(7+1)^2 + (0-2)^2} \\ &= \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \end{aligned}$$



따라서, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{AP} + \overline{BP} = 2\sqrt{17}$ 일 때의

점 P 는 직선 $A'B$ 와 직선 $x + y = 4$ 의 교점이다.

두 점 $A' (-1, 2), B (7, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y - 0 = \frac{0 - 2}{7 - (-1)} (x - 7),$$

$$y = -\frac{1}{4} (x - 7)$$

$$\therefore x + 4y - 7 = 0$$

두 방정식 $x + 4y - 7 = 0$, $x + y - 4 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 1$$

$$\therefore P (3, 1)$$

따라서, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 P (3, 1)