

1. x, y, z 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0$ 의 부정과 동치인 것은?
- ① $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$
 - ② x, y, z 는 서로 다르다.
 - ③ $x \neq y$ 이고 $y \neq z$
 - ④ $(x-y)(y-z)(z-x) > 0$
 - ⑤ x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0$ 이면 $x = y = z$ 이므로 이것의 부정은 $x \neq y$ 또는 $y \neq z$ 또는 $z \neq x$
즉, x, y, z 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

2. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $\sim q \rightarrow \sim p$

② $p \rightarrow r$

③ $q \rightarrow r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

- ① 명제 $p \rightarrow q$ 참이므로 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참
②, ③ 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 참이므로 대우인 ③ $q \rightarrow r$ 도 참이고, $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 로부터 ② $p \rightarrow r$ 도 참이다.
④ $p \rightarrow r$ 이 참이므로 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
⑤ 명제 $p \rightarrow r$ 이 참이라고 해도 이인 $\sim p \rightarrow \sim r$ 은 반드시 참이라고는 할 수 없다.

3. 어떤 건물에 불이 나서 경찰이 조사하였더니 누군가 방화한 것이고, ‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’라는 사실을 알아내었으며 불이 난 시간에 건물 안에 있었던 용의자를 잡아 범인으로 단정하였다. 이러한 단정은 반드시 옳은가? 또, 그 근거를 논리적으로 옳게 설명한 것은?
- ① 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow p$ 도 반드시 참이다.
 - ② 그렇다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
 - ③ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 반드시 참이다.
 - ④ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참이 되는 것은 아니다.
 - ⑤ 아니다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 반드시 참이다.

해설

‘방화범은 반드시 건물 안에 있었다.’가 참이라고 해서 ‘건물 안에 있었던 사람이 방화범이다.’도 참이라고 할 수는 없다. 즉, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이라 하여 그 역인 $q \rightarrow p$ 가 반드시 참인 것은 아니다.

4. $x \geq a$ 가 $-2 \leq x - 1 \leq 2$ 이기 위한 필요조건 일 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -1$

② $a \leq -1$

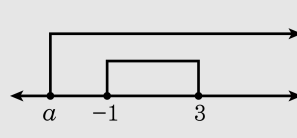
③ $a \leq 3$

④ $a \geq 3$

⑤ $a > 3$

해설

$-2 \leq x - 1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 3$,
 $x \geq a$ 가 $-1 \leq x \leq 3$ 의 범위를
포함해야 한다.



5. $a + b = 9$ 를 만족하는 양수 a, b 에 대하여 $[ab]$ 의 최댓값을 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2, ab \leq 20.25$$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

6. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

$$\text{둘레의 길이는 } 5 + 5\sqrt{2}$$

7. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은?

- ① $A = B, B = C$ 이면 $A = C$ 이다.
- ② $A \supset B, B = C$ 이면 $A \supset C$ 이다.
- ③ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ④ $A \supset B, B \supset C, C \supset A$ 이면 $A = C$ 이다.
- ⑤ $n(A) < n(B) < n(C)$ 이면 $A \subset B \subset C$ 이다.

해설

⑤ 예를 들면 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{6, 7, 8, 9\}$ 일 때,
 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이지만 $A \subset B \subset C$ 는 아니다.

8. 두 집합 $A = \{-1, 0, 2 \times a - 5, 5\}$, $B = \{0, b + 3, 3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{0, 3\}$ 이기 위한 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A \cap B = \{0, 3\}$ 이므로 $3 \in A$,

$2 \times a - 5 = 3$, $a = 4$

$A = \{-1, 0, 3, 5\}$, $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$ 이므로 $2 \in B$,

$b + 3 = 2$, $b = -1$

$\therefore a + b = 3$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음을 만족할 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라.

보기

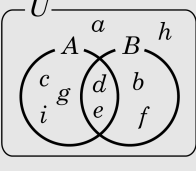
$$\begin{aligned} A \cup B &= \{b, c, d, e, f, g, i\} \\ A^c \cap B &= \{b, f\} \\ A^c \cup B^c &= \{a, b, c, f, g, h, i\} \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{aligned} A &= \{c, d, e, g, i\}, B = \{b, d, e, f\} \\ \therefore n(A) - n(B) &= 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

10. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 와 같은 값을 모두 고르면? (정답 3 개)

- ①

$n((A \cup B) - n(A \cap B))$
- ②

$n(\emptyset)$
- ③

$n(B) - n(A)$
- ④

$n(A)$
- ⑤

$n(B)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이므로 $A - B = \emptyset$, $B - A = \emptyset$ 이다.
따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.
따라서 $n(A) - n(B) = 0$ 이고,
① $n((A \cup B) - n(A \cap B)) = 0$
② $n(\emptyset) = 0$
③ $n(B) - n(A) = 0$ 이다.

11. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$

12. 자연수 n 의 양의 배수의 집합을 A_n 이라 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, m, n 은 자연수)

보기

- ㉠ $A_5 \cap A_7 = \emptyset$
- ㉡ $A_4 \cup A_6 = A_4$
- ㉢ m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
- ㉤ $m = kn$ (k 는 양의 정수) 이면 $A_m \subset A_n$

- ① ㉠, ㉡, ㉤
- ② ㉠, ㉢
- ③ ㉠, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉤
- ⑤ ㉢, ㉤

해설

- ㉠ $A_5 \cap A_7 = A_{35}$
- ㉡ $A_4 = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$
 $A_6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 이므로
 $A_4 \cup A_6 = \{4, 6, 8, 12, 16, \dots\} \neq A_4$
- ㉢ $A_m = \{m, 2m, \dots, nm, (n+1)m, \dots\}$
 $A_n = \{n, 2n, \dots, mn, (m+1)n, \dots\}$
 m, n 이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$
- ㉤ $A_m = A_{kn} = \{kn, 2kn, 3kn, \dots\}$
 $A_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$ 이므로
 $A_m \subset A_n$

13. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 40\text{이하의 자연수}\}$, $n(A) = 12$, $n(B) = 14$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n((A \cup B)^c)$ 를 구한 것은? .

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

$$n(U) = 40, n(A) = 12, n(B) = 14$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 26 - 5 = 21$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 21 = 19$$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같다.

$$p : (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$$
$$q : A = B$$
$$r : A \cup B = B$$

이 때, 조건 p 는 조건 q 이기 위한 $\textcircled{\tiny 1}$ 조건이고, 조건 q 는 조건 r 이기 위한 $\textcircled{\tiny 2}$ 조건이다. $\textcircled{\tiny 1}, \textcircled{\tiny 2}$ 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① 필요, 충분

② 필요충분, 필요

③ 필요, 필요

④ 필요충분, 충분

⑤ 충분, 필요

해설

$$(A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Leftrightarrow A - B = \emptyset, B - A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$$
$$\Leftrightarrow A = B \therefore p \Leftrightarrow q \text{ 이므로}$$

$\textcircled{\tiny 1}$: 필요충분조건

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ 이고 $A = B \Rightarrow A \subset B$ (역은 성립하지 않는다.)

$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 $\textcircled{\tiny 2}$: 충분조건

15. 빈이의 주머니에 0, 1, 2의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 헤교의 주머니에는 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : {0, 1, 2, 3, 4, 6}

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 0, 1, 2를 하나씩 차례로 헤교의 카드 1, 2, 3에 곱하면

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 0, 1, 2, 3, 4, 6이므로 원소나열법으로 나타내면 {0, 1, 2, 3, 4, 6} 이다.

16. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$n(\{\{0\}, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$$

17. 집합 $S = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 이라 하자. 각 집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{31}$ 에서 최소인 원소를 각각 뽑아 이들을 모두 더한 값을 구하면 $\frac{p}{q}$ (p, q 는 서로소)이다. 이 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 130

해설

㉠ $\frac{1}{3^4}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^4}$ 을 포함하는 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2^4$ 개

㉡ $\frac{1}{3^3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2^3$ 개

㉢ $\frac{1}{3^2}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^2}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2^2$ 개

㉤ $\frac{1}{3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 S 의 부분집합의 수와 같다.
 $\therefore 2$ 개

㉥ 1이 가장 작은 원소가 되는 경우는 1가지이다.

그러므로 구하는 값은 $\frac{1}{3^4} \times 2^4 + \frac{1}{3^3} \times 2^3 + \frac{1}{3^2} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1 = \frac{16 + 24 + 36 + 54 + 81}{81} = \frac{211}{81}$
 $\therefore p = 211, q = 81$ 이므로 $p - q = 130$

18. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap X = B \cap X$ 를 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$1 \in X$ 이면 $1 \in (A \cap X)$, $1 \notin (B \cap X)$, $5 \in X$ 이면 $5 \notin (A \cap X)$, $5 \in (B \cap X)$ 이므로 $A \cap X \neq B \cap X$ 이다. 따라서 U 의 원소 중 1과 5는 집합 X 의 원소가 될 수 없고, 나머지 다른 원소들은 X 의 원소가 되거나 되지 않아도 주어진 조건은 성립한다. 즉, 집합 X 는 1과 5를 포함하지 않는 U 의 부분집합의 개수와 같다.
 $\therefore X$ 의 개수는 $2^4 = 16$ (개)이다.

19. 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하고 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ 라 할 때,

$(s - a)(s - b)(s - c) \leq kabc$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ $\frac{1}{7}$
- ④ $\frac{1}{8}$
- ⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$$s - a = \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(-a + b + c) > 0$$

($\because a, b, c$ 는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s - b > 0, s - c > 0$

(산술평균) $\geq$ (기하평균)이므로

$$2\sqrt{(s - a)(s - b)} \leq (s - a) + (s - b) = c$$

(등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - b)(s - c)} \leq (s - b) + (s - c) = a$$

(등호는 $b = c$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - c)(s - a)} \leq (s - c) + (s - a) = b$$

(등호는 $c = a$ 일 때 성립)

$$\text{변변 곱하면 } 8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$$

$$\therefore (s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{1}{8}abc$$

(등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$\therefore k = \frac{1}{8}$$

20. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k 의 최댓값은?

- ① 2
- ② 5
- ③ 9
- ④ 12
- ⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q) + (q+r) + (r+p)$ 를 곱하면

$$6 + 2 \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq 2k$$

$$3 + \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r 이 양수이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

(좌변)

$$\begin{aligned} &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{q+r}{p+q} \cdot \frac{p+q}{q+r}} + 2 \sqrt{\frac{r+p}{q+r} \cdot \frac{q+r}{r+p}} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{r+p}{p+q} \cdot \frac{p+q}{r+p}} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $p=q=r$ 일 때 성립)

따라서 k 의 최댓값은 9이다.