1. $f\ :\ X \to Y$ 가 상수함수이고, $f(100) = 100$ 일 때, $f(2006) = a$ 이다. $a + 100$ 의 값은?

① 0　② 100　③ 200　④ 300　⑤ 400

해설

상수함수에 정의에 의해 $f(x) = 100$

$\therefore\ f(2006) = 100 = a$

따라서 $a + 100 = 200$

2. 함수 $f(x)=x^3+x^2+x-5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$(f \circ f)(x) = \left(x^3+x^2+x-5\right)^3$
$+\left(x^3+x^2+x-5\right)^2+\left(x^3+x^2+x-5\right)-5$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x=1$ 을 대입한 것과 같다.

$f(1)=-2$ 이므로

$\therefore\ f(f(1))=(-2)^3+(-2)^2+(-2)-5=-11$

3. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 X 로의 일대일대응 중에서 $f(x) \neq x$ 를 만족시킬 때, $f(2) + f^{-1}(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

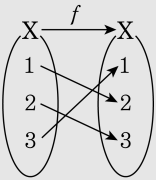
$f(x) \neq x$ 이므로 $f(1) = 2$ 또는 $f(1) = 3$ 이다.

(i) $f(1) = 2$ 이면

$f(3) \neq 3$ 이므로

$f(3) = 1,\ f(2) = 3$

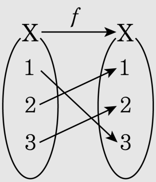
$\therefore\ f(2) + f^{-1}(2) = 3 + 1 = 4$



(ii) $f(1) = 3$ 이면 $f(2) \neq 2$ 이므로

$f(2) = 1,\ f(3) = 2$

$\therefore\ f(2) + f^{-1}(2) = 1 + 3 = 4$



(i), (ii) 에서

$f(2) + f^{-1}(2) = 4$

4. 함수 $f(x) = x - 2$, $g(x) = -2x + 1$일 때, $(f \circ g^{-1})(x)$를 구하면?

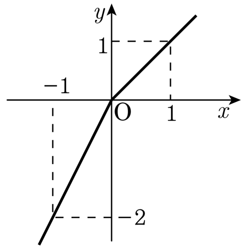
① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
③ $y = \frac{1}{2}x$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

해설

$$(g^{-1})(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(10) = f(f(10))$

㉡ $f^{-1}(-2) = -1$

㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠,㉡

④ ㉡,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠ $f(10) = 10$

$f(f(10)) = f(10) = 10$

$\therefore f(10) = f(f(10))$ (참)

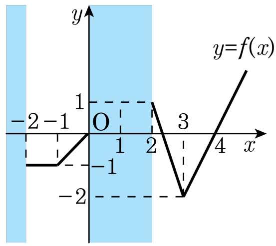
㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)

㉢ $y = f^{-}1(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는 무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

6. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



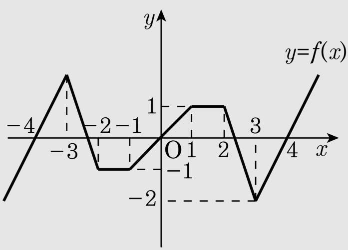
> $-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

7. 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$가 성립하는 함수 $f(x)$를 기함수라고 한다. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 기함수일 때, 다음 <보기>의 함수 중 기함수인 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $g(x) \cdot h(x)$
Ⅱ. $g(x) + h(x)$
Ⅲ. $g(h(x))$

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

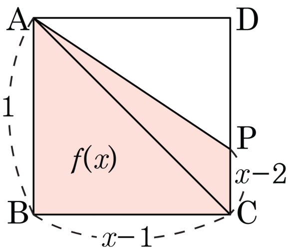
해설

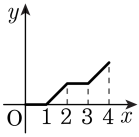
Ⅰ. $g(-x) \cdot h(-x) = \{-g(x)\} \cdot \{-h(x)\}$
$= g(x)h(x)$ (우함수)

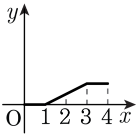
Ⅱ. $g(-x) + h(-x) = -g(x) - h(x)$
$= -\{g(x) + h(x)\}$ (기함수)

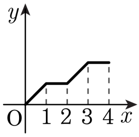
Ⅲ. $g(h(-x)) = g(-h(x))$
$= -g(h(x))$ (기함수)

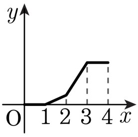
8. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

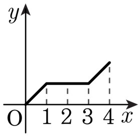


①


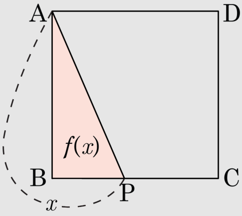
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

9. 집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X\cup Y=U,\ X\cap Y=\varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$U=\{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y\subset U,\ X\cup Y=U,$
$X\cup Y=\varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X)=n(Y)$
$n(X\cup Y)=n(U)=4,\ X\cup Y=\varnothing$ 이므로
$n(X)+n(Y)=4$ 이다.
$\therefore\ n(X)=n(Y)=2$
$X=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2\times 6=12$

10. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$
Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$
Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

㉠ $f(2) = 1$ ㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

11. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$\therefore\ x^3 = x,\ x^3 - x = 0,\ x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1\ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1\ or\ 0$

$\therefore\ -1 + 0 = -1$

12. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

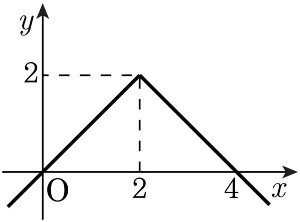
$\frac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\frac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\frac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f \circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

13. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \leq 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+4)$

$= -x + 4$

$\therefore x = 3$

실근의 개수 : 2 개.

14. 두 함수 $f(x) = x+1,\ g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

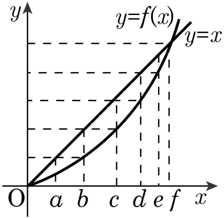
▷ **정답 :** 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

15. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$

④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b,\ (g \circ g)(c) = e$

f 와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.

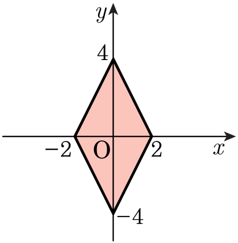
16. 함수 $2|x|+|y|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2|x|+|y|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$,
즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $8\times4\times\frac{1}{2}=16$

17. 함수 $y=|x-2|+|x+1|$ 이 $x=m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y=|x-2|+|x+1|$ 에서

i) $x<-1$ 일 때,

$y=-(x-2)-(x+1)=-2x+1$

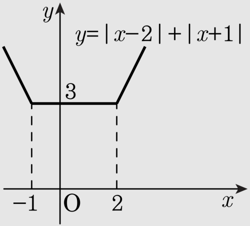
ii) $-1\le x<2$ 일 때,

$y=-(x-2)+(x+1)$

iii) $x\ge 2$ 일 때.

$y=(x-2)+(x+1)=2x-1=3$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 -1, 0, 1, 2 의 4 개다.



18. 임의의 양의 실수 x에 대하여, x를 넘지 않는소수의 개수를 $f(x)$라 하자. 예를 들면 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, $f(5) = 3$ 이다.<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(10) = 4$

㉡ 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) < x$ 이다.

㉢ 임의의 양의 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

10 이하의 소수는 $2, 3, 5, 7$ 이므로 $f(10) = 4$

㉡ $f(x) < [x] \leq x$ 이므로 $f(x) < x$

㉢ $x = 2$인 경우 $f(3) = 2, f(2) = 1$이므로 $f(3) \neq f(2)$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

19. 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족하는 $f(x)$ 는?

① $f(x) = x^2 - 4$

② $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

③ $f(x) = x^2 + 1$

④ $f(x) = 2x$

⑤ $f(x) = \sqrt{x+1}$

해설

$f(x) = 2x$에서

$f(a+b) = 2(a+b)$

$f(a)+f(b) = 2a+2b$이므로 $f(a+b) = f(a)+f(b)$가 성립한다.

$\therefore$ ④

20. $f(x) = x^2 - x$ 로 나타내어지는 함수 $f : A \rightarrow A$ 는 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일대응이다. a 의 값을 구하면 ?

① 4 ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$ 가 일대일함수이므로

그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대응이므로

$A = \{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a) = a$ 이어야 한다.

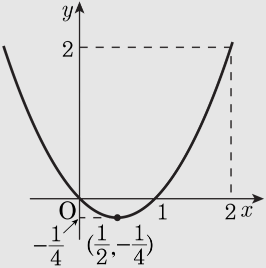
$f(x) = x^2 - x$ 에서 $f(a) = a$ 이므로

$a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$

$\therefore \ a = 0, \ 2$

그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore \ a = 2$



21. 함수 $y=f(x)$ 에서 $f^{(2)}=f\circ f,\ f^{(3)}=f\circ f^{(2)},\ \cdots,\ f^{(n)}=f\circ f^{(n-1)}$ 라 정의한다. $f(x)=2x-1$ 에 대하여 $f(1)+f^{(2)}(1)+f^{(3)}(1)+\cdots+f^{(2008)}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2008

해설

$f(1)=1,$

$f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)=f(2x-1)=4x-3$ 에서 $f^{(2)}(1)=1$,

$f^{(3)}(x)=(f\circ f^{(2)})(x)=f(4x-3)=8x-7$ 에서 $f^{(3)}\ (1)=1$

$f^{(4)}(x)=(f\circ f^{(3)})(x)=f(8x-7)=16x-15$ 에서 $f^{(4)}(1)=1$

이다.

이와 같이 추론하면 $f^{(n)}(x)=2^n x-(2^n-1),\ f^{(n)}(1)=1$ 이다.

$\therefore\ f(1)+f^{(2)}(1)+f^{(3)}(1)+\cdots+f^{(2008)}(1)=1\times 2008=2008$

22. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $g(0) = 5$ 가 된다. $f(2x+1) = h(x)$ 로 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $e(x)$ 로 할 때 $e(0)$ 의 값은 ?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$g(x) = f^{-1}(x),\ g(0) = f^{-1}(0) = 5$

$\therefore\ f(5) = 0$ 문제의 조건에서

$f(5) = f(2 \times 2 + 1) = h(2) = 0$

또 $e(x) = h^{-1}(x)$ 이므로 $e(0) = h^{-1}(0)$

$\therefore\ h(2) = 0$ 이므로 $h^{-1}(0) = e(0) = 2$

23. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.

$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \le 0) \\ 3x + 1 & (x \ge 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \le 0) \\ 3x + 1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$f(0) = 1 = -a$

$\therefore a = -1$

$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = (f^{-1} \circ f^{-1})(4)$

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4) = k$ 라 하면 $f(k) = 4$

$3k + 1 = 4$ ($\because$ $x \le 0$ 에서 $2x + 1 \le 1$)$k = 1$ 이고

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1) = m, f(m) = 1$ 에서 $2m + 1 = 1$ (또는 $3m + 1 = 1$), $m = 0$

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = 0$

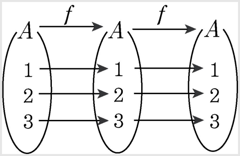
24. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

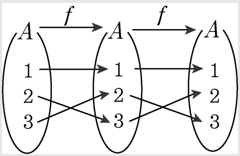
▷ 정답 : 4 개

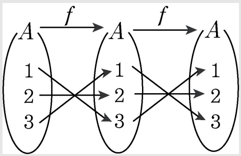
해설

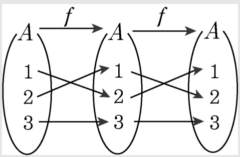
i) $f(x) = x$ 인 경우 1 개



ii) 1 개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2 개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3 인 3 가지 경우가 있다.







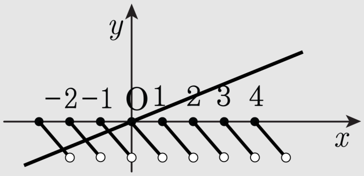
i), ii) 에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 3 = 4$(개)

25. 함수 $y=[x]-x$ 와 $y=\frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \le x < -2$ 일 때, $[x]=-3$ 이므로
$y=[x]-x=-3-x$
$-2 \le x < -1$ 일 때, $[x]=-2$ 이므로
$y=[x]-x=-2-x$
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x]=-1$ 이므로
$y=[x]-x=-1-x$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x]=0$ 이므로
$y=[x]-x=-x$
$1 \le 2x < 2$ 일 때, $[x]=1$ 이므로
$y=[x]-x=1-x$
따라서 $y=[x]-x$ 와 $y=\frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4 개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.

i) $-3 \le x < -2$ 일 때, $-3-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=-\frac{9}{4}$

ii) $-2 \le x < -1$ 일 때, $-2-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$

iii) $-1 \le x < 0$ 일 때, $-1-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$

iv) $0 \le x < 1$ 일 때, $-x=\frac{1}{3}x \quad \therefore x=0$

$\therefore \ a=4\ ,\ b=\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{2}$

$\therefore a+b=4+\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{1}{2}$