1. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
② $\sqrt{2(a+b)} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$
③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$
④ $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$
⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
$= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b)$
$= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$
$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$
(단, 등호는 $a = b$ 일때성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

3. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

4. $x \geq 0,\ y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2　② 3　③ $\sqrt{10}$　④ $\sqrt{15}$　⑤ 4

해설

$x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\left(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}$
$=2(x+3y)$
$=16$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.

5. n이 자연수 일 때, 2^{10n}, 1000^{n} 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^{n}$ ② $2^{10n} \leq 1000^{n}$ ③ $2^{10n} > 1000^{n}$
④ $2^{10n} \geq 1000^{n}$ ⑤ $2^{10n} = 1000^{n}$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^{n} > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^{n}} = \frac{(2^{10})^{n}}{1000^{n}} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^{n} = \left(\frac{1024}{1000}\right)^{n} > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^{n}$

6. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

7. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$
② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$
③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$
④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$
⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3 \times 1.7)$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1$ 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

8. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

ㄱ $\dfrac{a}{b^2} < \dfrac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$

ㄴ $a > b$ 이면 $ac > bc$

ㄷ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$

ㄹ $|a| + |b| > |a + b|$

ㅁ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㄱ, ㅁ　② ㄴ, ㄹ, ㄱ　③ ㄷ, ㄹ

④ ㄱ, ㄷ, ㅁ　⑤ ㄱ, ㄹ, ㅁ

해설

ㄱ $\dfrac{a}{b^2} < \dfrac{c}{b^2}$

$\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면

$a < c \ (\because b^2 > 0)$

ㄴ $a > b$ 이면 $ac > bc$

반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림

ㄷ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$

ㄹ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림

ㅁ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right\} \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

9. $a+b=9$를 만족하는 양수 a, b에 대하여 $[ab]$의 최댓값을 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

산술기하평균의 관계를 이용하면 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$ab \leq \left(\frac{9}{2}\right)^2$, $ab \leq 20.25$

$\therefore [ab]$ 의 최댓값은 20

10. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(2a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$(2a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}\right) = 10 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{16a}{b}$

산술기하조건을 사용하면

$\dfrac{b}{a} + \dfrac{16a}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a} \times \dfrac{16a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $10 + 8 = 18$

11. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로

$\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right) = 3 + 36xy + \frac{1}{xy} + 12$

$= 15 + 36xy + \frac{1}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{36\frac{1}{xy} \cdot xy} + 15 = 27$

12. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$

$\therefore\ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$

13. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$

14. $a>1$일 때 $b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $c=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>c>a$
④ $b>a>c$ ⑤ $c>b>a$

해설

$b-a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)-a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-a\right)$

그런데, $a>1$이므로 $\frac{1}{a}-a<0$ $\therefore$ $b<a$

또, $b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)>\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1$ $\left(\because\ a\neq\frac{1}{a}\right)$

$c-b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)-b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-b\right)<0$

$\therefore$ $c<b$

$\therefore$ $a>b>c$

15. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots$ (A)가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots$ (B)이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 (다) 필요충분조건

16. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{9}{a-1}$ 의 최솟값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=4-4a<0$

$\therefore a>1$

$\therefore (a-1)+\dfrac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{9}{(a-1)}}=6$

따라서 최솟값은 6

17. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서　$y+z=4-x \cdots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서　$y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \ge (y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2) \ge (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \le 0$
$(3x-2)(x-2) \le 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \le x \le 2$
따라서 $M=2,\ m=\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{M}{m}=3$

18. 서로 다른 세 양수 p, q, r에 대하여 $\frac{2}{p+q}+\frac{2}{q+r}+\frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k의 최댓값은?

① 2　　② 5　　③ 9　　④ 12　　⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q)+(q+r)+(r+p)$를 곱하면

$$6+2\left\{\left(\frac{q+r}{p+q}+\frac{r+p}{p+q}\right)+\left(\frac{p+q}{q+r}+\frac{r+p}{q+r}\right)+\left(\frac{p+q}{r+p}+\frac{q+r}{r+p}\right)\right\} \geq 2k$$

$$3+\left\{\left(\frac{q+r}{p+q}+\frac{r+p}{p+q}\right)+\left(\frac{p+q}{q+r}+\frac{r+p}{q+r}\right)+\left(\frac{p+q}{r+p}+\frac{q+r}{r+p}\right)\right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r이 양수이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

(좌변)

$$\geq 3+2\sqrt{\frac{q+r}{p+q}\cdot\frac{p+q}{q+r}}+2\sqrt{\frac{r+p}{q+r}\cdot\frac{q+r}{r+p}}+2\sqrt{\frac{r+p}{p+q}\cdot\frac{p+q}{r+p}}$$

$$=3+2+2+2=9$$

(단, 등호는 $p=q=r$일 때 성립)

따라서 k의 최댓값은 9이다.

19. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$의 최솟값을 구하여라.

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2,\ \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

20. $x>3$일 때 $\frac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\frac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\frac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\frac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\frac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

21. 양수 x에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$는 $x = a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$\frac{x^2+2x+2}{x} = x+2+\frac{2}{x}$

$x+\frac{2}{x}+2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}}+2 = 2\sqrt{2}+2$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b = 2\sqrt{2}+2$

등호는 $x = \sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1 = -2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1 = 3$

22. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z = 1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

(준식)$= 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$ 이므로

(준식)$= 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$

$x+y+z=1$ 이므로

$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\qquad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 (준식)$\geq 8+36+81=125$