

1. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \cap \emptyset = A$

② $B \cup \emptyset = \emptyset$

③ $(A \cap B) \subset B$

④ $(A \cup B) \subset A$

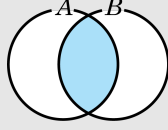
⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

해설

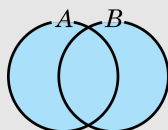
① $A \cap \emptyset = \emptyset$

② $B \cup \emptyset = B$

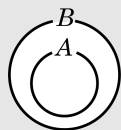
③ $(A \cap B) \subset B$



④ $(A \cup B) \supset A$



⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$



3. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 모두 만족할 때, $U - (A \cup B)$ 은?

- ㉠ $U = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$

㉡ $A \cap B^c = \{1\}$

㉢ $A^c \cap B = \{6, 10\}$

㉣ $A \cap B = \{2, 4, 8\}$

- ① {3, 4, 5, 7, 9}

② {4, 5, 7, 9}

③ {4, 7, 9}

④ {3, 4, 5, 6, 7, 9}

⑤ {3, 5, 7, 9}

해설

㉠. $U = \{x|x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

㉡. $A \cap B^c = \{1\} = A - B$

㉢. $A^c \cap B = \{6, 10\} = B - A$

㉣. $A \cap B = \{2, 4, 8\}$ 에서
 $A \cup B = \{1\} \cup \{6, 10\} \cup \{2, 4, 8\}$
 $= \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로
 $U - (A \cup B) = \{3, 5, 7, 9\}$

4. 과학의 날 행사에 1학년 10반 학생 35명이 전원 참여하였다. 물로켓 발사대회에 참여한 학생이 20명, 에어로켓 발사대회에 참여한 학생이 23명이라고 한다. 두 대회에 모두 참여한 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 8명

해설

전체집합을 U , 물로켓 발사대회 참여 학생들의 집합을 A , 에어로켓 발사대회 참여 학생들의 집합을 B 라고 하면

$$n(U) = 35, n(A) = 20, n(B) = 23$$

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 20 + 23 - 35 \\ &= 8 \end{aligned}$$

5. 다음은 수근이가 중학교에 입학한 첫 날의 일기이다. 밑 줄 친 말 중에서 집합이 될 수 있는 것을 모두 골라라.

5월 18일 비온 뒤 껌
오늘은 내가 중학교에 입학한 첫 날이다. 교복을 입은 내 모습이 어색해 보였지만, 새로 사귀게 될 ㉠ 멋진 친구들과 선생님을 만날 생각을 하니 기대가 되었다.
입학 첫 날이어서 그런지 부모님과 함께 온 학생들도 많았다. 나는 ㉡ 1학년 1반에 배정되었는데, ㉢ 6학년 때 같은 반이었던 친구들도 있었다.
선생님은 중학교 생활에 대하여 여러 가지 말씀을 하신 후, 자리를 정해 주셨다. 나는 ㉣ 키가 큰 편이어서 뒤쪽에 앉게 되었는데, 눈이 나빠서 칠판이 잘 보이지 않았다. 내일은 안경을 맞추어야겠다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

‘멋진’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

‘큰’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

6. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$$

$$a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{81}{16} \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$$

7. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.
다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

두 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 4, 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6 이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6 으로 되어있다.

8. 자연수를 원소로 갖는 집합 A 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수는?

$x \in A \text{ 이면 } \frac{16}{x} \in A$

- ① 4 개
- ② 5 개
- ③ 6 개
- ④ 7 개
- ⑤ 8 개

해설

$1 \in A$ 이면 $\frac{16}{1} = 16 \in A$,
 $2 \in A$ 이면 $\frac{16}{2} = 8 \in A$,
 $4 \in A$ 이면 $\frac{16}{4} = 4 \in A$
따라서 집합 A 는
 $\{4\}$, $\{1, 16\}$, $\{2, 8\}$, $\{1, 4, 16\}$, $\{2, 4, 8\}$,
 $\{1, 2, 8, 16\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$ 의 7개이다.

9. 집합 $S = \{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\} \subset S$	㉡ $\{b\} \in S$
㉢ $\{b, c, d\} \in S$	㉣ $c \in S, d \in S$
㉤ $\{c, d\} \subset S$	㉥ $S \subset \{a, b, c, d\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다.

따라서 집합 S 의 원소는

$\{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 가 된다.

㉠ $\{a\} \subset S \rightarrow \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

㉡ $\{b\} \in S \rightarrow b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.

㉢ $\{b, c, d\} \in S \rightarrow b, c, d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b, c, d\} \subset S$ 가 되어야 한다.

㉣ $c \in S, d \in S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

㉤ $\{c, d\} \subset S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c, d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.

㉥ $S \subset \{a, b, c, d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢, ㉤이다.

10. 두 집합 $A = \left\{ \left\lceil \frac{9}{5}k \right\rceil \mid k \text{는 } 1 \leq k \leq a \text{인 정수} \right\}$ $B = \left\{ \left\lceil \frac{9}{4}k \right\rceil \mid k \text{는 } 1 \leq k \leq b \text{인 정수} \right\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 인 정수 a, b 의 최솟값의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)
- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$k = 1, 2, 3, \dots$ 일 때,
각각의 $\left\lceil \frac{9}{5}k \right\rceil$ 와 $\left\lceil \frac{9}{4}k \right\rceil$ 의 값을 알아보면,
 $\left\lceil \frac{9}{5}k \right\rceil : 1, 3, 5, 7, 9, 10 \dots$
 $\left\lceil \frac{9}{4}k \right\rceil : 2, 4, 6, 9, 11, \dots$
 $A \cap B \neq \emptyset$ 이 되려면 $a \geq 5, b \geq 4$
 a, b 의 최솟값의 합은 9

11. 집합 $A_n = \{x \mid 2n-1 \leq x \leq 5n+1\}$ 에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ 가 성립하는 자연수 n 의 최댓값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$A_1 = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$
 $A_n = \{x \mid 2n-1 \leq x \leq 5n+1\}$
 $\therefore 2n-1 \leq 6 \Rightarrow n \leq \frac{7}{2}$
따라서 자연수 n 의 최댓값은 3

해설

$A_1 = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $A_2 = \{x \mid 3 \leq x \leq 11\}$, $A_3 = \{x \mid 5 \leq x \leq 16\}$, $A_4 = \{x \mid 7 \leq x \leq 21\}$ 이상에서 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$
 $\therefore n$ 의 최댓값은 3

12. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : ‘나는 범인이 아니다.’
B : ‘D가 범인이다.’
C : ‘D는 거짓말을 했다.’
D : ‘C가 범인이다.’

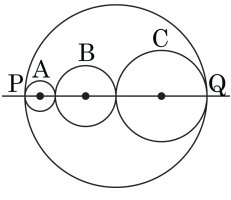
- ① A와 B
- ② A와 D
- ③ B와 A
- ④ D와 A
- ⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
∴ A 가 범인이다.

2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.

13. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
 ④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
 구의 겹넓이는
 $S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$
 $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
 PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$

14. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 a, b, c, d, e 라고 할 때, $a + 3b + 5c + 7d + 9e$ 의 최솟값은?

- ① 83
- ② 85
- ③ 87
- ④ 89
- ⑤ 91

해설

$a + 3b + 5c + 7d + 9e$
 $= (10 - 9)a + (10 - 7)b + (10 - 5)c + (10 - 3)d + (10 - 1)e$
 $= 10(a + b + c + d + e) - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$
 $= 10 \times 25 - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$
여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
 $(9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq (9a + 7b + 5c + 3d + e)^2$
 $(9a + 7b + 5c + 3d + e) \leq (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$ 이고
등호는 $\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = \frac{d}{3} = \frac{e}{1}$ 일 때, 성립한다.
 $\therefore a + 3b + 5c + 7d + 9e \geq 10 \times 25 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = 250 - (165) = 85$
따라서, $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$ 일 때,
준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

a, b, c, d, e 가 자연수이므로
 $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$ 일 때
준식은 최소가 된다.

15. 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 물탱크를 만들려고 한다. 물탱크를 만드는 데 드는 비용은 밑면이 8000 원/m^2 이고 옆면은 4000 원/m^2 이다. 밑면의 가로 길이 $x \text{ m}$, 부피가 36 m^3 인 물탱크를 만들 때, 가장 적은 비용으로 물탱크를 만든다면 그 비용은 얼마인가?
- ① 240000 원 ② 248000 원 ③ 256000 원
④ 264000 원 ⑤ 272000 원

해설

그림에서 물 탱크의 옆넓이는 $(8 + 2x)y \text{ (m}^2\text{)}$ 이므로
그 비용은 $(8 + 2x)y \cdot 4000 \text{ (원)}$ 이고,
밑넓이는 $4x \text{ (m}^2\text{)}$ 이므로
그 비용은 $4x \cdot 8000 \text{ (원)}$ 이다.
한편, 부피가 36 m^3 이므로 $4xy = 36$
 $\therefore xy = 9$
따라서, 총비용 p 는
 $p = 4000(8y + 2xy + 8x) = 8000(4x + 4y + 9)$
 $\geq 8000(2\sqrt{4x \cdot 4y} + 9) = 8000(2 \cdot 12 + 9)$
 $= 264000 \text{ (원)}$
따라서, $x = 3$ 일 때,
 p 의 최소값은 264000 (원)

16. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때,
 $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \cdots \textcircled{A}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \times 2 + \textcircled{B}$ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

18. 집합 $X = \{-1, 1\}$ 을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R 를 공역으로 하는 함수

$f(x) = |x|, g(x) = ax - 2$ 에 대하여 $f(-1) = g(-1)$ 일 때, $a + g(1)$ 의 값은?

- ① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$f(-1) = g(-1) \text{에서 } |-1| = -a - 2, 1 = -a - 2$$

$$\therefore a = -3$$

$$\text{이때, } g(1) = -3 - 2 = -5$$

$$\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$$

19. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?
- ① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n 에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100 \text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100 \text{일 때}) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

20. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

- ① 3
- ② 2
- ③ -1
- ④ -2
- ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ &= \frac{1+3}{1-3} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1+f(2)}{1-f(2)} \\ &= \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{1+f(3)}{1-f(3)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1+f(4)}{1-f(4)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$f(5) = f(1) = 3$ 이므로

$$f(6) = f(2) = -2, f(7) = f(3) = -\frac{1}{3}$$

$$f(8) = f(4) = \frac{1}{2}, f(9) = f(5) = f(1) = 3, \cdots$$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

$3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore f(4n+k) = f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k = 0, 1, 2, 3$)

그러므로 $f(1998) = f(4 \times 499 + 2) = f(2) = -2$

22. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.

㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.

㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

23. 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

- ① 2 개 ② 5 개 ③ 10 개
④ 20 개 ⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1, 2\}$ 이고 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
 a, b, c, d, e 5가지
 $f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4가지
 $\therefore 5 \times 4 = 20(\text{개})$

24. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

25. 임의의 양수 x, y 에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$

$\therefore f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y)$ ($\because$ ④가참)