1. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$

$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$

따라서 최댓값은 14이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

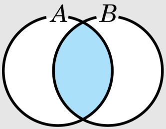
① $A \cap \varnothing = A$
② $B \cup \varnothing = \varnothing$
③ $(A \cap B) \subset B$
④ $(A \cup B) \subset A$
⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

해설

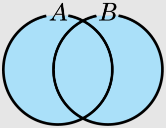
① $A \cap \varnothing = \varnothing$

② $B \cup \varnothing = B$

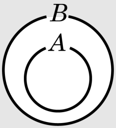
③ $(A \cap B) \subset B$



④ $(A \cup B) \supset A$



⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$



3. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 가 다음 조건을 모두 만족할 때, $U-(A\cup B)$ 은?

㉠ $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$
㉡ $A\cap B^c=\{1\}$
㉢ $A^c\cap B=\{6,10\}$
㉣ $A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$

① $\{3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$
② $\{4,\ 5,\ 7,\ 9\}$
③ $\{4,\ 7,\ 9\}$
④ $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$
⑤ $\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

해설

㉠. $U=\{x \mid x$는 10 이하의자연수$\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, 9,\ 10\}$
㉡. $A\cap B^c=\{1\}=A-B$
㉢. $A^c\cap B=\{6,\ 10\}=B-A$
㉣. $A\cap B=\{2,\ 4,\ 8\}$에서
$A\cup B=\{1\}\cup\{6,10\}\cup\{2,4,8\}$
$=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 이므로
$U-(A\cup B)=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

4. 과학의 날 행사에 1 학년 10 반 학생 35 명이 전원 참여하였다. 물로켓 발사대회에 참여한 학생이 20 명, 에어로켓 발사대회에 참여한 학생이 23 명이라고 한다. 두 대회에 모두 참여한 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 8 명

해설

전체집합을 U, 물로켓 발사대회 참여 학생들의 집합을 A, 에어로켓 발사대회 참여 학생들의 집합을 B 라고 하면

$n(U) = 35,\ n(A) = 20,\ n(B) = 23$

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 20 + 23 - 35 \\ &= 8 \end{aligned}$$

5. 다음은 수근이가 중학교에 입학한 첫 날의 일기이다. 밑 줄 친 말 중에서 집합이 될 수 있는 것을 모두 골라라.

> 5월 18일 비온 뒤 갬
> 오늘은 내가 중학교에 입학한 첫 날이다. 교복을 입은 내 모습이 어색해 보였지만, 새로 사귀게 될 ㉠ 멋진 친구들과 선생님을 만날 생각을 하니 기대가 되었다.
> 입학 첫 날이어서 그런지 부모님과 함께 온 학생들도 많았다. 나는 ㉡ 1학년 1반에 배정되었는데, ㉢ 6학년 때 같은 반이었던 친구들도 있었다.
> 선생님은 중학교 생활에 대하여 여러 가지 말씀을 하신 후, 자리를 정해 주셨다. 나는 ㉣ 키가 큰 편이어서 뒤쪽에 앉게 되었는데, 눈이 나빠서 칠판이 잘 보이지 않았다. 내일은 안경을 맞추어야겠다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

'멋진' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
'큰' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.

6. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \cdots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$
,

$a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_5 = \frac{81}{16}$ 이다.

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$

7. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.
다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

> 두 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 4, 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6 이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6 으로 되어있다.

8. 자연수를 원소로 갖는 집합 A가 다음 조건을 만족할 때, 집합 A의 개수는?

$x \in A$ 이면 $\dfrac{16}{x} \in A$

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$1 \in A$ 이면 $\dfrac{16}{1} = 16 \in A$,

$2 \in A$ 이면 $\dfrac{16}{2} = 8 \in A$,

$4 \in A$ 이면 $\dfrac{16}{4} = 4 \in A$

따라서 집합 A는

$\{4\}$, $\{1, 16\}$, $\{2, 8\}$, $\{1, 4, 16\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 8, 16\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16\}$의 7개이다.

9. 집합 $S = \{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\} \subset S$	㉡ $\{b\} \in S$
㉢ $\{b,\ c,\ d\} \in S$	㉣ $c \in S,\ d \in S$
㉤ $\{c,\ d\} \subset S$	㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다.
따라서 집합 S 의 원소는
$\{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 가 된다.
㉠ $\{a\} \subset S \ \rightarrow\ \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉡ $\{b\} \in S \ \rightarrow\ b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.
㉢ $\{b, c, d\} \in S \ \rightarrow\ b, c, d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b, c, d\} \subset S$ 가 되어야 한다.
㉣ $c \in S, d \in S \ \rightarrow\ c, d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉤ $\{c, d\} \subset S \ \rightarrow\ c, d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c, d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.
㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

10. 두 집합 $A = \left\{ \left[\frac{9}{5}k \right] \,\middle|\, k\text{는 } 1 \le k \le a\text{인 정수} \right\}$ $B = \left\{ \left[\frac{9}{4}k \right] \,\middle|\, k\text{는 } 1 \le k \le b\text{인 정수} \right\}$에 대하여 $A \cap B \ne \varnothing$인 정수 a, b의 최솟값의 합은?

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때,

각각의 $\left[\frac{9}{5}k\right]$ 와 $\left[\frac{9}{4}k\right]$ 의 값을 알아보면,

$\left[\frac{9}{5}k\right]$: 1, 3, 5, 7, 9, 10 $\cdots$

$\left[\frac{9}{4}k\right]$: 2, 4, 6, 9, 11, $\cdots$

$A \cap B \ne \varnothing$ 이 되려면 $a \ge 5,\ b \ge 4$

$a,\ b$ 의 최솟값의 합은 9

11. 집합 $A_n = \{x \mid 2n-1 \le x \le 5n+1\}$에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \ne \varnothing$가 성립하는 자연수 n의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A_1 = \{x|1 \le x \le 6\}$

$A_n = \{x|2n-1 \le x \le 5n+1\}$

$\therefore 2n-1 \le 6 \Rightarrow n \le \frac{7}{2}$

따라서 자연수 n의 최댓값은 3

해설

$A_1 = \{x \mid 1 \le x \le 6\}$, $A_2 = \{x \mid 3 \le x \le 11\}$, $A_3 = \{x \mid 5 \le x \le 16\}$, $A_4 = \{x \mid 7 \le x \le 21\}$ 이상에서 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$

$\therefore$ n의 최댓값은 3

12. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : '나는 범인이 아니다.' B : 'D가 범인이다.' C : 'D는 거짓말을 했다.' D : 'C가 범인이다.'

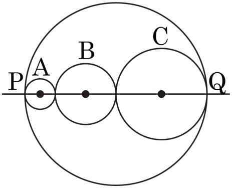
① A와 B ② A와 D ③ B와 A

④ D와 A ⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
$\therefore A$ 가 범인이다.
2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.

13. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면

구의 겉넓이는

$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$

$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$

$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$

$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$

$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$이므로 $8\sqrt{35}$

14. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라고 할 때, $a+3b+5c+7d+9e$의 최솟값은?

① 83 ② 85 ③ 87 ④ 89 ⑤ 91

해설

$a+3b+5c+7d+9e$

$=(10-9)a+(10-7)b+(10-5)c+(10-3)d+(10-1)e$

$=10(a+b+c+d+e)-(9a+7b+5c+3d+e)$

$=10\times 25-(9a+7b+5c+3d+e)$

여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(9^2+7^2+5^2+3^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\geq(9a+7b+5c+3d+e)^2$

$(9a+7b+5c+3d+e)\leq(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)$이고

등호는 $\dfrac{a}{9}=\dfrac{b}{7}=\dfrac{c}{5}=\dfrac{d}{3}=\dfrac{e}{1}$일 때, 성립한다.

$\therefore\ a+3b+5c+7d+9e\geq 10\times 25-(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)=250-(165)=85$

따라서, $a=9,\ b=7,\ c=5,\ d=3,\ e=1$일 때,

준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$가 자연수이므로

$a=9,\ b=7,\ c=5,\ d=3,\ e=1$일 때

준식은 최소가 된다.

15. 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 물탱크를 만들려고 한다. 물탱크를 만드는 데 드는 비용은 밑면이 8000 원/ m^2 이고 옆면은 4000 원/ m^2 이다. 밑면의 가로의 길이가 4 m, 부피가 36 m^3 인 물탱크를 만들 때, 가장 적은 비용으로 물탱크를 만든다면 그 비용은 얼마인가?

① 240000 원 ② 248000 원 ③ 256000 원

④ 264000 원 ⑤ 272000 원

해설

그림에서 물 탱크의 옆넓이는
$(8+2x)y(\mathrm{m}^2)$ 이므로
그 비용은 $(8+2x)y\cdot 4000$(원) 이고,
밑넓이는 $4x(\mathrm{m}^2)$ 이므로
그 비용은 $4x\cdot 8000$(원) 이다.
한편, 부피가 36 m^3 이므로 $4xy=36$
$\therefore\ xy=9$
따라서, 총비용 p는
$p=4000(8y+2xy+8x)=8000(4x+4y+9)$
$\geq 8000(2\sqrt{4x\cdot 4y}+9)=8000(2\cdot 12+9)$
$=264000$(원)
따라서, $x=3$ 일 때,
p 의 최소값은 264000(원)

16. $x < 0$인 실수 x에 대하여 $f(x)$가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$를 만족할 때, $f(x)$의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

해설

$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$에서

$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots\cdots$ ㉠

x에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2 +$ ㉡하면

$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2+2}{x}$

$\therefore f(x) = \frac{x^2+2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$

$x < 0$이므로

$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \le -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore f(x)$의 최댓값은 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

17. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\begin{cases}2-x & (x\text{는 유리수})\\ x & (x\text{는 무리수})\end{cases}$$

로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 $f(x)=\begin{cases}2-x & (x\text{는 유리수})\\ x & (x\text{는 무리수})\end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x)+f(2-x)=(2-x)+\{2-(2-x)\}=2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x)+f(2-x)=x+(2-x)=2$$

(i), (ii) 에서 $f(x)+f(2-x)=2$

18. 집합 $X = \{-1, 1\}$을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수
$f(x) = |x|$, $g(x) = ax - 2$에 대하여 $f(-1) = g(-1)$일 때, $a + g(1)$의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$f(-1) = g(-1)$에서 $|-1| = -a - 2$, $1 = -a - 2$

$\therefore a = -3$

이때, $g(1) = -3 - 2 = -5$

$\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$

19. 자 연 수 전 체 의 집 합 에 서 정 의 된 함 수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$ 의 값을 구하면?

① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

자연수 n에 대하여

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$$ 이므로

$$\begin{aligned} f(98) &= f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ &= f(100) = 99 \end{aligned}$$

20. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1$, $y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ -1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}=\frac{1+3}{1-3}=-2$$

$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$

$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

22. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수) 로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다. ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다. ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
$\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

23. 두 집합 $X = \{1,\ 2\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 2 개　　② 5 개　　③ 10 개

④ 20 개　　⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1,\ 2\}$ 이고 $Y = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 5 가지
$f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지
$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(개)

24. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

> 집합 $\mathrm{A} = \{a,\ b,\ c\}$일 때, A에서 A로의 함수 $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$에 대하여,
> 함수의 개수는 m개,
> 일대일 대응 함수의 개수는 n개,
> 상수 함수는 s개,
> 항등함수는 r개이다.
> $m+n+s+r$의 값을 구하여라.

① 21　② 27　③ 33　④ 37　⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지)　$\therefore\ m = 27$
일대일 대응의 개수는
$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지
$\therefore\ s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$
따라서 $m+n+s+r = 27+6+3+1 = 37$

25. 임의의 양수 x, y에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore\ f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y)$($\because$ ④가참)