

1. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x = y$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $x \geq 0, y \geq 0$

⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

2. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \geq |x - y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$$\begin{aligned} & (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2 \\ &= 2(|xy| + xy) \geq 0 \\ &\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2 \\ &\text{그런데 } |x| + |y| \geq 0, |x - y| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|x| + |y| \geq |x - y| \text{ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

① $xy > 0$

② $xy < 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy \leq 0$

⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.
 $|xy| \geq 0$ 이므로
 $|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

3. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ㉠ $|a| = -a$
- ㉡ $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.
- ㉢ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.
- ㉣ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

- ㉠ $|a| = a(a \geq 0)$
 $-a(a < 0)$
- ㉡ 참
- ㉢ 참
- ㉣ $(|a + b + c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
 $(|a| + |b| + |c|)^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
 $|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$
 $\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ㉤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$
 $\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

4. 길이가 10인 쇠파이프를 n 등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?
- ① 6000 원 ② 7000 원 ③ 8000 원
④ 9000 원 ⑤ 10000 원

해설

$$\begin{aligned} & \text{쇠파이프 한 개의 길이 : } \frac{10}{n} \\ & (\text{총 비용}) = 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1) \\ & = \frac{25000}{n} + 1000n - 1000 \\ & \geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000 \\ & = 2 \times 5000 - 1000 \\ & = 10000 - 1000 = 9000 \end{aligned}$$

5. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
 y 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$ 분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, \quad 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서 xy 의 최댓값은 45이다.

6. $a > 1$ 일 때, $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

7. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2$ 와 $xy + yz + zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나] 에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2} \{ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \} \\ &= \frac{1}{2} (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} ([가]) 0 \text{ 이므로} \\ & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)} \end{aligned}$$

- ① $<, x = y = z$

② $\leq, x = y = z$

③ $\geq, x = y = z$

④ $<, xy = yz = zx$

⑤ $\leq, xy = yz = zx$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2} \{ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0 \text{ 이므로} \\ & x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (단, 등호는 } x = y = z \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

8. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

- ㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$
- ㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$
- ㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$
- ㉣ $|a| + |b| > |a + b|$
- ㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣, ㉠

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

- ㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$
 $\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면
 $a < c$ ($\because b^2 > 0$)
- ㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$
반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림
- ㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$
- ㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0$
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림
- ㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$
 $= \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} \geq 0$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

9. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.
- ㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$
- ㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠. (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때, $4 < 9 \quad \therefore$ 거짓
- ㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 \geq xy$
 $\therefore$ 참
- ㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
 $x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$
 $\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$
 $\therefore$ 참

10. 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$ 임을 증명한 것이다. $[가]$, $[나]$ 에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

- ① $>, \geq$
- ② $\geq, \geq$
- ③ $>, >$
- ④ $<, \geq$
- ⑤ $\leq, \leq$

해설

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a, b 가 실수이므로)
 $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

11. 부등식 $a^2 + b^2 > 2(a + b - 1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

준식을 정리하면

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 > 0, (a - 1)^2 + (b - 1)^2 > 0$$

따라서 $a = 1, b = 1$ 일 때만 이 부등식이 성립하지 않는다.

$$\therefore a + b = 2$$

12. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- ㉡ $x^2 + 4x \geq -4$
- ㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$
- ㉣ $x^2 \geq 0$
- ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$
 $= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉡ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉢ $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$
 $(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 - ㉣ $x^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$
 $= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$
 $\rightarrow$ 절대부등식
- 따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

13. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y 는 실수임)

- ① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- ② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (단, $ax = by$ 일 때, 등호 성립)
- ④ $a^2 + b^2 \geq ab$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)
- ⑤ 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)

해설

- ②의 반례 : a, b 가 음수인 경우
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
 $= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$
 $- (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
 $= (ay - bx)^2 \geq 0$ 단, 등호는 $ay = bx$ 일때 성립
- ④ $a^2 + b^2 - ab$
 $= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
등호는 $a = b = 0$ 일때 성립
- ⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
($\therefore$ 산술평균 $\geq$ 기하평균 $\geq$ 조화평균)

14. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

15. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

16. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

17. 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

a, b 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에서

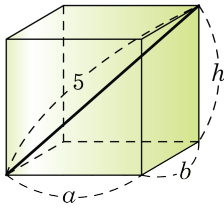
$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ 이므로

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

18. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2 + b^2 + h^2 = 25$
 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.
 $(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$
 $\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값
 $: 20\sqrt{3}$

19. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$

- ① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$

② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$
- ④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$

⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$

해설

$a + b = 5 - c, \quad a^2 + b^2 = 11 - c^2$ 을
코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에 대입하면
 $2(11 - c^2) \geq (5 - c)^2$
 $3c^2 - 10c + 3 \leq 0, (3c - 1)(c - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq c \leq 3$