1. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1}가 존재하므로, f는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 4개이다.

2. 두 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$a,\ b,\ c$ 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a),\ f(b),\ f(c))$ 으로 나타내면
$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),$
$(3,2,1)$ 이므로
X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6 개이다.

3. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

$a \to \boxed{}$, $b \to \boxed{}$, $c \to \boxed{}$

Y의 원소 p, q, r, s에서 세 개를 뽑아 위 $\boxed{}$안에 늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.
이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.
따라서 a에는 p, q, r, s의 4가지,
b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c에는 a, b에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$(개)

4. 두 함수 $y = |x+1| - |x-2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m의 값을 정할 때, 다음 중 m의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x+1| - |x-2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) - (-x+2) = -3$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

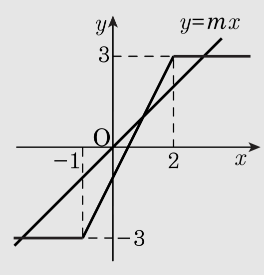
$y = (x+1) - (-x+2) = 2x - 1$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$y = (x+1) - (x-2) = 3$

i) ii) iii) 에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$

따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④ 번이다.



5. 함수 $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a + b = 0$　② $a - b = 0$　③ $a + b = 1$
④ $a - b = 1$　⑤ $a + b = 2$

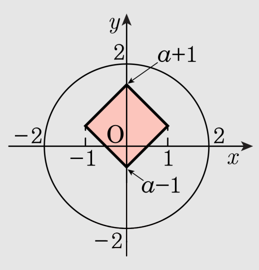
해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 $f(x) = f(-x)$ 이다.
$f(x) = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 라 하면
$f(-x) = a|-x+1| - b|-x-1| + 2$
$= -b|x+1| + a|x-1| + 2$
$f(x) = f(-x)$ 에서 $a = -b$
$\therefore\ a + b = 0$

6. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y-a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \le a \le 1$
④ $-1 \le a \le 1$ ⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



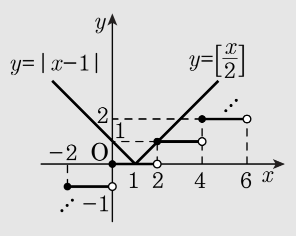
두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y-a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$ 이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y-a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid |x| + |y-a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

7. 두 함수 $y = | x - 1 |$, $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = | x - 1 |$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = | x - 1 |$ 과 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

8. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$
따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4,\ f(x)$는 정수$\}$이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ 일 때
$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

9. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

ㄱ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.

ㄴ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는n 개이다.

ㄷ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $x \ge 0$ 이면 $[x] \ge 0$ 이므로 $x[x] \ge 0$
$x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$
그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로
$f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)
ㄴ 자연수 n 에 대하여 $n \le x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로
$f(x) = [nx]$
$n^2 \le nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로
$f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ n^2+(n-1)$ 로서
모두 n 개이다. (참)
ㄷ 자연수 n 에 대하여 $-n \le x < n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로
각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \le n^2$
따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는
$n^2 - n, (n^2 - n) + 1, \cdots, (n^2 - n) + (n-1), (n^2 - n) + n$
로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)