

1. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 6개

⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를

순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$

$(3, 2, 1)$ 이므로

X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.

3. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 64개

해설

$a \rightarrow \square$, $b \rightarrow \square$, $c \rightarrow \square$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 $\square$ 안에
늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,
 b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$$

4. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

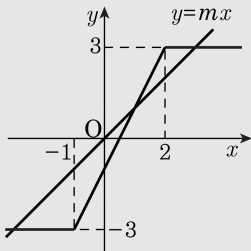
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



5. 함수 $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a + b = 0$

② $a - b = 0$

③ $a + b = 1$

④ $a - b = 1$

⑤ $a + b = 2$

해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이면 $f(x) = f(-x)$ 이다.

$f(x) = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 라 하면

$$f(-x) = a|-x+1| - b|-x-1| + 2$$

$$= -b|x+1| + a|x-1| + 2$$

$$f(x) = f(-x) \text{ 에서 } a = -b$$

$$\therefore a + b = 0$$

6. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$

② $-2 < a < 2$

③ $-2 \leq a \leq 1$

④ $-1 \leq a \leq 1$

⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,

$q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여

q 는 p 이기 위한 충분조건이므로

각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고

반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

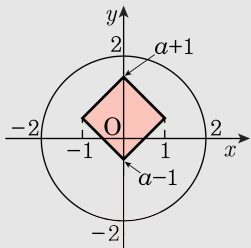
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 이라면 다음 그림에서

$$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$



7. 두 함수 $y = |x - 1|$, $y = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$ 의 그래프의 교점의 개수를 구하면?
(단, $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 1 개

② 2 개

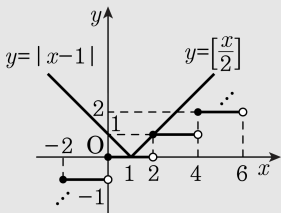
③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$y = |x - 1|$ 과 $y = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, $y = |x - 1|$ 과 $y = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 개이다.

8. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠

② ㉢

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$ 따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4, f(x) \text{는 정수}\}$ 이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1, x_2 = 3$ 일 때

$$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$$

$$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0 \text{ 이므로}$$

$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

9. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

- ㉠ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.
 ㉡ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \leq x < n+1\}$ 의 원소의 개수는 n 개이다.
 ㉢ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \leq x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $x \geq 0$ 이면 $[x] \geq 0$ 이므로 $x[x] \geq 0$
 $x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$
 그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로
 $f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)
 ㉡ 자연수 n 에 대하여 $n \leq x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로
 $f(x) = [nx]$
 $n^2 \leq nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로
 $f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2, n^2 + 1, \dots, n^2 + (n-1)$ 로서
 모두 n 개이다. (참)
 ㉢ 자연수 n 에 대하여 $-n \leq x < -n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로
 각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \leq n^2$
 따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는
 $n^2 - n, (n^2 - n) + 1, \dots, (n^2 - n) + (n-1), (n^2 - n) + n$
 로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)