

1. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

2. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x + k, \quad g(x) = 2x + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

3. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
 ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
 ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
 ㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$
 즉 $f(n) = 0$
 ㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
 ㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
 홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

4. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

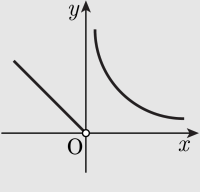
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
II . $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
III . $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I , II ④ II , III ⑤ I , III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$
 $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>
II .
i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로
 $f(-x) = -(-x) = x,$
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로
 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$
i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>
III . 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,
 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>
따라서 옳은 것은 I , II 이다.

5. $0 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x) = x(1-x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = \frac{1}{2}f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. 이 때 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{16}$ ② $-\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$f(x+1) = \frac{1}{2}f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x-1)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$