1. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \geq 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 이므로
$|a|+|b| \geq |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \leq 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \geq 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \leq 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \geq 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \leq 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \geq 0$ 이어야 한다

2. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \ge \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert-\lvert y\rvert$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x+y\rvert^2=2(\lvert xy\rvert-xy)\ge 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert+\lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x=1, y=-1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert=0,\ \ \lvert 1-(-1)\rvert=2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2-(\lvert x\rvert-\lvert y\rvert)^2=2(\lvert xy\rvert-xy)\ge 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert-\lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert a\rvert^2 = a^2$	㉡ $\lvert ab\rvert \geq ab$
㉢ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$	㉣ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉣ $(\lvert a\rvert - \lvert b\rvert)^2 - \lvert a-b\rvert^2$
$= \lvert a\rvert^2 - 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 - (a-b)^2$
$= 2(ab - \lvert ab\rvert) \leq 0$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

4. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \ge |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \ge (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \ge |a + b|$

① $|a| \ge a$

② $a \ge b$, $b \ge c$ 이면 $a \ge c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \ge 0$ 이면 $a \ge b$

⑤ $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a^2 \ge b^2$ 이면 $a \ge b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \ge 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \ge (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \ge |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

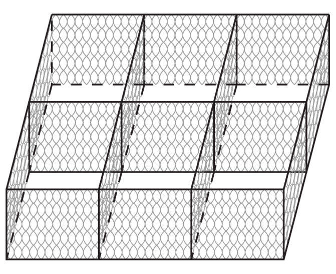
5. 길이가 $16\,\mathrm{m}$ 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$　② $16\,\mathrm{m}^2$　③ $25\,\mathrm{m}^2$　④ $36\,\mathrm{m}^2$　⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.
$2(x+y)=16 \quad x+y=8$
산술기하평균을 사용하면,
$x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$4 \geq \sqrt{xy}$
$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$
$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

6. 동원이가 길이 152 m 인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?

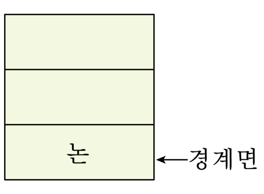


① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면
$152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$이고
등호가 성립할 때, xy가 최대가 된다.
$3x = 4y$일 때, 등호가 성립하므로
$6x = 152$
즉, $x = \frac{76}{3}$일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

7. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m^2인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



① 70만원　② 71만원　③ 72만원
④ 73만원　⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x라 하면

가로의 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$3\times 2x+3\times\frac{27}{x}\times 2+\frac{27}{x}\times 2$

$=6x+\frac{162}{x}+\frac{54}{x}$

$=6x+\frac{216}{x}$

$\geq 2\sqrt{6x\cdot\frac{216}{x}}$

$=2\sqrt{1296}=2\times 36=72$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

8. 빗변의 길이가 5 인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$　② $5+5\sqrt{2}$　③ 25
④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$　⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 $a,\ b$라 하면
$a^2+b^2=25$ 이고
$a^2+b^2 \geq 2ab$ 에서 $25 \geq 2ab$
$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$ 이므로
삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고
$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 일 때
둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

9. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\frac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

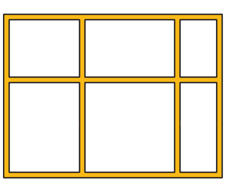
여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2 이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

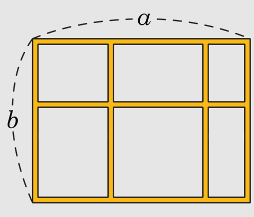
10. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$　② $(1200, 40)$　③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$　⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because\ 3a + 4b = 240)$

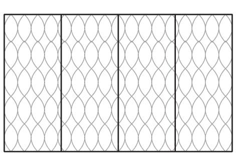
$\therefore\ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240,$

$\therefore\ a = 40$

11. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$ ② $70\mathrm{m}^2$ ③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$ ⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab\leq 60^2$

$\therefore\ ab\leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

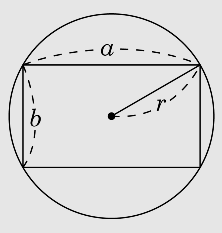
$S=ab\leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

12. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

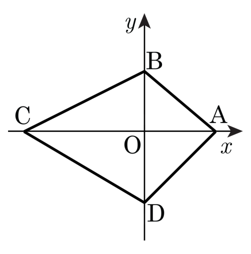
① $2r(\mathrm{cm}^2)$　② $r^2(\mathrm{cm}^2)$　③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$　④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$　⑤ $\dfrac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



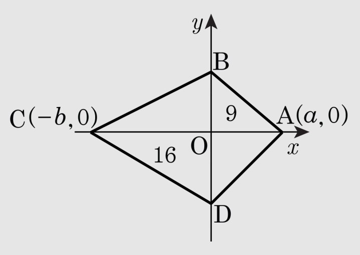
$a^2+b^2=(2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \geq 2(ab)$
$ab \leq 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $=2r^2$

13. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. △OAB와 △OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37　　② 40　　③ 43　　④ 46　　⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

(□ABCD의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$

14. 부등식 $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \leq 0$이어야 하므로
$a^2 + 2a + 1 - 4a - 4$
$= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 3$
따라서 정수 a의 개수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$으로 5개

15. 다음 중 절대부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a=b$ ② $ab>0$ ③ $a=b=0$
④ $a>b$ ⑤ $b>a$

해설

$a^2+b^2+ab=a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ ($\because$ $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0,\ \frac{3}{4}b^2\ 0$)

$\therefore a^2+b^2 \geq ab$

단, 등호는 $a+\frac{1}{2}b=0$ 이고 $b=0$

즉,$a=0$ 이고 $b=0$일 때, 성립한다.

16. 다음 [보기] 중에 x에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x는 실수이다.)

보기

ㄱ $x+1>0$　　ㄴ $x^2-2x+1 \geq 0$

ㄷ $x^2 < x+12$　　ㄹ $x^2+1>x$

① ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

ㄴ $x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ x는모든실수(절대부등식)

ㄷ $x^2 < x+12 \Leftrightarrow x^2-x-12<0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4)<0$

$\Leftrightarrow -3<x<4$

ㄹ $x^2+1>x \Leftrightarrow x^2-x+1>0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}>0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\Leftrightarrow$ x는모든실수(절대부등식)

17. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$ ㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참
㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓
㉢ [반례] $x = 0,\ y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

18. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a>20,\ \ b>25$

② $a>=20,\ \ b>25$

③ $a>20,\ \ b=25$

④ $a=20,\ \ b>25$

⑤ $a=20,\ \ b<25$

해설

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+b>0$

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$(20-a)y+25-b<0$

이것이 임의의 실수 y에 대하여 항상 성립할 조건은

$20-a=0,\ 25-b<0$

$\therefore\ a=20,\ b>25$

19. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

해설

① 반례 : $a = -1$, $b = 1$

$|-1| - |1| \geq |-1-1|$

$|-1| - |1| \geq |-2|$

$1 - 1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (◯)$

③ $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0 \rightarrow (◯)$

④ $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (◯)$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + 1$

$= (a-1)^2 + (b-1)^2 + 1 > 0 \rightarrow (◯)$

20. 다음 중 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $-x^2 + 4x - 6 < 0$

㉡ $x^2 - 6x + 9 > 0$

㉢ $x^2 - 2x + 4 \geq 0$

㉣ $a = b < 0$이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b는 실수)

㉤ $a = b \leq 0$이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b는 실수)

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉡ $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$
㉤ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b \geq bx + a$
따라서 항상 성립하는 것은 ㉠, ㉢, ㉣ 의 3개이다.

21. 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2-xy+y^2 \geq 0$
(나) $x^2-x+1>0$
(다) $|a+b| \leq |a|+|b|$
(라) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
(바) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

(라) $a+b \geq 2\sqrt{ab}$(단, $a=b$일때 등호성립)
(마) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$(단, $a=b=c$일때 등호성립)

22. 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2+2axy+by^2 \geq 0$이 성립하기 위한 실수 $a,\ b$의 조건은?

① $a \leq b^2$　② $b^2 \leq a$　③ $a^2 \leq b$
④ $b \leq a^2$　⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2+2axy+by^2 \geq 0$에서 양변을 y^2으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2a\left(\frac{x}{y}\right)+b \geq 0$$

모든 실수 x, y에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4}=a^2-b \leq 0$$

$\therefore a^2 \leq b$

23. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건은 a[(가)]0, b^2-4ac[(나)]0이고, $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립할 조건은 a[(다)]0, b^2-4ac[(라)]0이다. 이 때, (가) ~ (라)의 [　] 안에 들어갈 부등호를 순서대로 적으면?

① $>$, $<$, $<$, $\ge$　　② $>$, $>$, $<$, $\le$

③ $>$, $<$, $\le$, $<=$　　④ $>$, $>$, $\le$, $\le$

⑤ $>$, $<$, $<$, $\le$

해설

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

(ⅰ) $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건

$\Rightarrow a[>]0,\ b^2-4ac[<]0$

(ⅱ) $ax^2+bx+c\le 0$이 항상 성립할 조건 $\Rightarrow a[<]0,\ b^2-4ac[\le]0$

24. 다음은 $a,\ b,\ c$가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
$([가])\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}([나])0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
때 성립)

① $\frac{1}{2},\ >$ ② $\frac{1}{2},\ \geq$ ③ $2,\ >$ ④ $2,\ \geq$ ⑤ $2,\ =$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
두식의차를변형하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$
$\because a,b,c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0$,
$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
성립)

25. 다음은 실수 $a,\ b,\ c$ 가 모두 양수일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc \ge 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉮] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\ [㉮] \ge 0 \end{aligned}$$

① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

③ $(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$

④ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

⑤ $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$

해설

① $\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2\}$
$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

26. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9　② 11　③ 13　④ 15　⑤ 17

해설

$\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$

$=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+1$

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$ 에서

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{c}}=2,\ \dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

27. $x>3$일 때 $\dfrac{3}{x-3}+2+3x$의 최솟값은?

① 3　　② 5　　③ 12　　④ 15　　⑤ 17

해설

$\dfrac{3}{x-3}+2+3x=3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$

이 때, $x>3$이므로 $3(x-3)>0$, $\dfrac{3}{x-3}>0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3)+\dfrac{3}{x-3}+11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3)\cdot\dfrac{3}{x-3}}+11$

$=2\cdot 3+11=17$

(단, 등호는 $3(x-3)=\dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x=4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

28. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$\dfrac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\dfrac{2}{x}$

$x+\dfrac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

29. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r} \geq 3 \times 3\sqrt{\dfrac{l}{p} \times \dfrac{m}{q} \times \dfrac{n}{r}}$

그런데 $\{l, m,\ n\} = \{p, q, r\}$이므로

$lmn = pqr$이다.

따라서, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p,\ m = q,\ n = r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

30. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$ 의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$　② $2^3\sqrt{3}$　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$
$$= 3\sqrt[3]{8} = 6$$

31. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균) 을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

해설

(산술평균)≥(기하평균) 을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$에서
$a=b=c=1$

32. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$　② $2\sqrt[3]{3}$　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$일 때 성립)

33. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2+1+\frac{1}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\ge 2+1=3$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

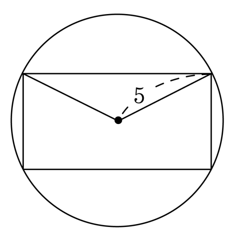
34. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

35. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$　② $5\sqrt{2}$　③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$　⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b 라 하면
$a^2 + b^2 = 100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \ge (a+b)^2$
$\therefore 200 \ge (a+b)^2 \therefore a + b \le 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
$2(a+b) = 20\sqrt{2}$

36. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을

$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$이라 하면

$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로

$\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$

$\therefore 24 = \frac{1}{2}\times x_1 \times 6 + \frac{1}{2}\times x_2\times 8 + \frac{1}{2}\times x_3 \times 10$이므로

$3x_1+4x_2+5x_3=24$

코시-슈바르츠 부등식에서

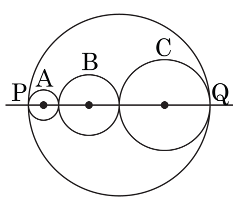
$(3^2+4^2+5^2)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2) \geq (3x_1+4x_2+5x_3)^2$

$\therefore 50\cdot({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\geq 576$

$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \geq \frac{576}{50}=\frac{288}{25}$

따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

37. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$　② $6\sqrt{35}$　③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$　⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면
구의 겉넓이는
$S_1 = 4\pi x^2,\ S_2 = 4\pi y^2,\ S_3 = 4\pi z^2$
$4\pi(x^2+y^2+z^2) = 40\pi$
$\therefore x^2+y^2+z^2 = 10$
$(x^2+y^2+z^2)(2^2+4^2+6^2) \geq (2x+4y+6z)^2$
$10 \cdot 56 \geq (2x+4y+6z)^2$
$4\sqrt{35} \geq 2x+4y+6z$
PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x+4y+6z)$이므로 $8\sqrt{35}$