1. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2(\quad ㉠ \quad) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0,\ |a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab| = ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab| = -ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab| = -ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab| = ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab| = ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

2. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert)^2 - \lvert x+y\rvert^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x\rvert + \lvert y\rvert \geq \lvert x+y\rvert$

㉡ (반례) $x = 1, y = -1$ 일 때

$\lvert 1+(-1)\rvert = 0,\quad \lvert 1-(-1)\rvert = 2$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

㉢ $\lvert x-y\rvert^2 - (\lvert x\rvert - \lvert y\rvert)^2 = 2(\lvert xy\rvert - xy) \geq 0$

$\therefore\ \lvert x-y\rvert \geq \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert a\rvert^2 = a^2$	㉡ $\lvert ab\rvert \geq ab$
㉢ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$	㉣ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉣ $(\lvert a\rvert - \lvert b\rvert)^2 - \lvert a-b\rvert^2$

$= \lvert a\rvert^2 - 2\lvert a\rvert\lvert b\rvert + \lvert b\rvert^2 - (a-b)^2$

$= 2(ab - \lvert ab\rvert) \leq 0$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

4. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab) \ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$ (③이 쓰임)
$= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

5. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

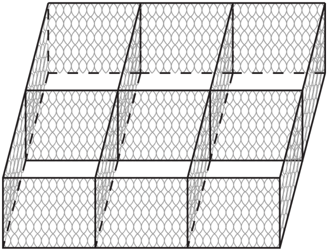
$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

6. 동원이가 길이 152 m 인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?



① 19　　② $\frac{68}{3}$　　③ $\frac{70}{3}$　　④ 24　　⑤ $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면

$152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$ 이고

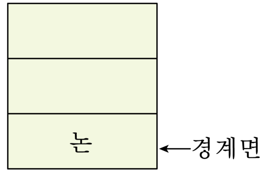
등호가 성립할 때, xy가 최대가 된다.

$3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로

$6x = 152$

즉, $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

7. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m^2 인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원

④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x라 하면

가로의 길이는 $\dfrac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

8. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$ ② $5+5\sqrt{2}$ ③ 25
④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b라 하면
$a^2+b^2=25$이고
$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$
$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4}$이므로
삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$이고
$a=b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$일 때
둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

9. x가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$ 의 최댓값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

$x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1+1$

$=x^2\left(x^2-2x+3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+1$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3\right\}+1$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1\right\}+1$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)^2+1$

$=(x^2-x+1)^2+1$

$\therefore$ 준식 $=\dfrac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2+1}$ 이고

$x^2-x+1=\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 이므로

$x^2-x+1=t$로 치환 $t\geq\dfrac{3}{4}$ 하면

준 식 : $\dfrac{t}{t^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{t^2+1}{t}}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}}$

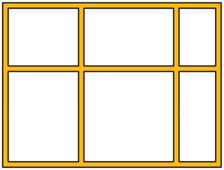
여기서 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

$(\because\ t\geq\dfrac{3}{4})$

따라서 $\dfrac{t^{-1}+1}{t}$ 의 최솟값은 2이고

$\dfrac{t}{t^2+1}$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

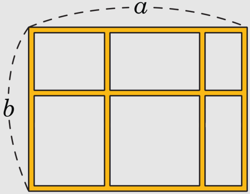
10. 길이가 240 인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6 개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



① $(600, 40)$　② $(1200, 40)$　③ $(600, 30)$

④ $(1200, 30)$　⑤ $(450, 60)$

해설



$3a + 4b = 240$

$3a + 4b \geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b}$

$240 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{12}} \geq \sqrt{ab} (\because\ 3a + 4b = 240)$

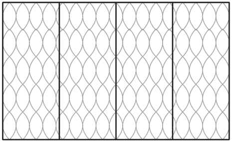
$\therefore\ 1200 \geq ab$

단, 등호는 $3a = 4b$ 일 때 성립하므로,

$3a + 4b = 6a = 240,$

$\therefore\ a = 40$

11. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$　② $70\mathrm{m}^2$　③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$　⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab\leq 60^2$

$\therefore\ ab\leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

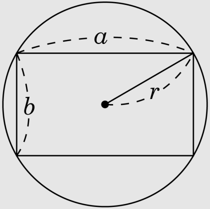
$S=ab\leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

12. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

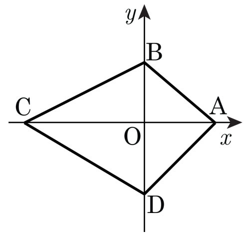
① $2r(\mathrm{cm}^2)$ ② $r^2(\mathrm{cm}^2)$ ③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$
④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$ ⑤ $\dfrac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



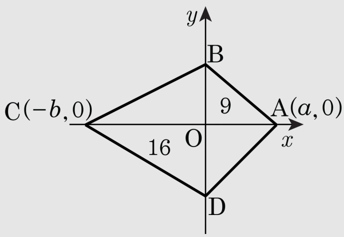
$a^2 + b^2 = (2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \geq 2(ab)$
$ab \leq 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $= 2r^2$

13. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. △OAB와 △OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



$\mathrm{A}(a,\ 0)$이면, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

$\mathrm{C}(-b,\ 0)$이면 $\mathrm{D}\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

(□ABCD의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$

14. 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1)\geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1)\leq 0$이어야 하므로

$a^2+2a+1-4a-4$

$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

따라서 정수 a의 개수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$으로 5개

15. 다음 중 절대부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a=b$　　② $ab>0$　　③ $a=b=0$

④ $a>b$　　⑤ $b>a$

해설

$$a^2+b^2+ab=a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0\ (\because\ \left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0,\ \frac{3}{4}b^2\ 0)$$

$\therefore a^2+b^2 \geq ab$

단, 등호는 $a+\frac{1}{2}b=0$ 이고 $b=0$

즉,$a=0$ 이고 $b=0$일 때, 성립한다.

16. 다음 [보기] 중에 x에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x는 실수이다.)

보기

ㄱ $x+1>0$

ㄴ $x^2-2x+1\geq 0$

ㄷ $x^2<x+12$

ㄹ $x^2+1>x$

① ㄴ
② ㄱ, ㄷ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

ㄴ $x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow$ x는모든실수(절대부등식)

ㄷ $x^2<x+12 \Leftrightarrow x^2-x-12<0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4)<0$

$\Leftrightarrow -3<x<4$

ㄹ $x^2+1>x \Leftrightarrow x^2-x+1>0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}>0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$\Leftrightarrow$ x는모든실수(절대부등식)

17. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$

㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉠, ㉡
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참
㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0$ $\therefore$ 거짓
㉢ [반례] $x = 0$, $y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0$ $\therefore$ 거짓

18. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a > 20, \quad b > 25$

② $a >= 20, \quad b > 25$

③ $a > 20, \quad b = 25$

④ $a = 20, \quad b > 25$

⑤ $a = 20, \quad b < 25$

해설

$x^2 + 2(2y+5)x + 4y^2 + ay + b > 0$

$\frac{D}{4} = (2y+5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$

$(20-a)y + 25 - b < 0$

이것이 임의의 실수 y에 대하여 항상 성립할 조건은

$20 - a = 0,\ 25 - b < 0$

$\therefore\ a = 20,\ b > 25$

19. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \geq |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \geq 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \geq |-1-1|$

$|-1|-|1| \geq |-2|$

$1-1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \rightarrow (\bigcirc)$

20. 다음 중 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $-x^2+4x-6<0$
㉡ $x^2-6x+9>0$
㉢ $x^2-2x+4\geq 0$
㉣ $a=b<0$이고, $ax-b>bx+a$ (단, a, b는 실수)
㉤ $a=b\leq 0$이고, $ax-b>bx+a$ (단, a, b는 실수)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉡ $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$

㉤ $a=b\leq 0$ 이고, $ax-b\geq bx+a$

따라서 항상 성립하는 것은 ㉠, ㉢, ㉣ 의 3개이다.

21. 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
(나) $x^2 - x + 1 > 0$
(다) $|a+b| \leq |a| + |b|$
(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
(바) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$(단, $a = b$일때 등호성립)
(마) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$(단, $a = b = c$일때 등호성립)

22. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+2axy+by^2 \geq 0$이 성립하기 위한 실수 a, b의 조건은?

① $a \leq b^2$　② $b^2 \leq a$　③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$　⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2+2axy+by^2 \geq 0$에서 양변을 y^2으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2a\left(\frac{x}{y}\right)+b \geq 0$$

모든 실수 x, y에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4}=a^2-b \leq 0$$

$\therefore a^2 \leq b$

23. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건은 a[(가)]0, b^2-4ac[(나)]0이고, $ax^2+bx+c \le 0$이 항상 성립할 조건은 a[(다)]0, b^2-4ac[(라)]0이다. 이 때, (가) ~ (라)의 [ ]안에 들어갈 부등호를 순서대로 적으면?

① $>$, $<$, $<$, $\ge$
② $>$, $>$, $<$, $\le$
③ $>$, $<$, $\le$, $<=$
④ $>$, $>$, $\le$, $\le$
⑤ $>$, $<$, $<$, $\le$

해설

모든 실수 x에 대하여 이차부등식
(i) $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립할 조건
$\Rightarrow a[>]0,\ b^2-4ac[<]0$
(ii) $ax^2+bx+c \le 0$이 항상 성립할 조건 $\Rightarrow a[<]0,\ b^2-4ac[\le]0$

24. 다음은 a, b, c가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
$([\text{가}])\,(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\,([\text{나}])0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
때 성립)

① $\frac{1}{2}$, $>$ ② $\frac{1}{2}$, $\geq$ ③ 2, $>$ ④ 2, $\geq$ ⑤ 2, $=$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
두식의차를변형하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$
$\because$ a, b, c 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0$,
$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
성립)

25. 다음은 실수 $a,\ b,\ c$ 가 모두 양수일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉮] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$
\begin{aligned}
& a^3+b^3+c^3-3abc \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)\ [㉮] \geq 0
\end{aligned}
$$

① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

③ $(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$

④ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

⑤ $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$

해설

① $\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2\}$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

26. 양의 실수 a, b, c사이에 대하여 $\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b+c}{c}$의 최솟값을 구하여라.

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$$

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}$에서

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2,\ \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

27. $x > 3$일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3　　② 5　　③ 12　　④ 15　　⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$
$$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$$
$$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

28. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

29. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\}=\{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p}+\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}\geq 3\times 3\sqrt{\frac{l}{p}\times\frac{m}{q}\times\frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m,\ n\}=\{p, q, r\}$이므로

$lmn=pqr$이다.

따라서, $\dfrac{l}{p}+\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{r}\geq 3$

(단, 등호는 $l=p,\ m=q,\ n=r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

30. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$ 의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= 3\sqrt[3]{8} = 6$$

31. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 a, b, c에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

해설

(산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$에서
$a=b=c=1$

32. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$일 때 성립)

33. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1 이다.

최솟값은 3 이고, x값은 1 이다.

34. 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

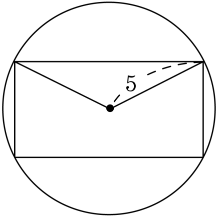
① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,

$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

35. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b 라 하면
$a^2+b^2=100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$
$\therefore 200 \geq (a+b)^2 \ \therefore a+b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
$2(a+b)=20\sqrt{2}$

36. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\dfrac{288}{25}$ ② $\dfrac{144}{15}$ ③ $\dfrac{144}{25}$ ④ $\dfrac{288}{25}$ ⑤ $\dfrac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을

$\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$이라 하면

$\angle C$가 직각인 직각삼각형이므로

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PAC$

$\therefore 24=\dfrac{1}{2}\times x_1\times 6+\dfrac{1}{2}\times x_2\times 8+\dfrac{1}{2}\times x_3\times 10$이므로

$3x_1+4x_2+5x_3=24$

코시-슈바르츠 부등식에서

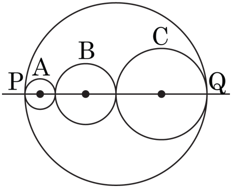
$(3^2+4^2+5^2)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\ge(3x_1+4x_2+5x_3)^2$

$\therefore 50\cdot({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)\ge 576$

$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2\ge\dfrac{576}{50}=\dfrac{288}{25}$

따라서 최솟값은 $\dfrac{288}{25}$

37. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$　② $6\sqrt{35}$　③ $8\sqrt{35}$　④ $10\sqrt{35}$　⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면
구의 겉넓이는
$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$
$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$이므로 $8\sqrt{35}$