

1. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 } (\quad \text{㉢} \quad) \text{일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ① $|ab|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$
② $|ab|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$
③ $|ab|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$
④ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$
⑤ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

2. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny A}$ $|x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny B}$ $|x + y| \geq |x - y|$

$\textcircled{\tiny C}$ $|x - y| \geq |x| - |y|$

- $\textcircled{1}$ $\textcircled{\tiny A}$

$\textcircled{2}$ $\textcircled{\tiny B}$

$\textcircled{3}$ $\textcircled{\tiny A}, \textcircled{\tiny B}$

$\textcircled{4}$ $\textcircled{\tiny A}, \textcircled{\tiny C}$

$\textcircled{5}$ $\textcircled{\tiny B}, \textcircled{\tiny C}$

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

$\neg \quad a ^2 = a^2$	$\sqcup \quad ab \geq ab$
$\subseteq \quad a + b \geq a - b $	$\supseteq \quad a - b \geq a - b $

- ① $\neg, \sqcup$

② $\sqcup, \subseteq$

③ $\neg, \sqcup, \subseteq$
- ④ $\neg, \subseteq, \supseteq$

⑤ $\sqcup, \subseteq, \supseteq$

4. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

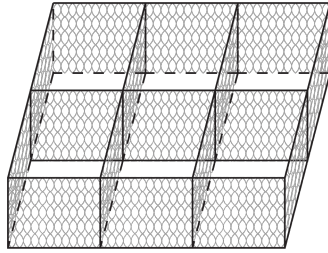
$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
③ $|a|^2 = a^2$
④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

5. 길이가 16 m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

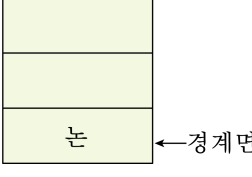
① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

6. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

7. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m²인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원
- ② 71만원
- ③ 72만원
- ④ 73만원
- ⑤ 74만원

8. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

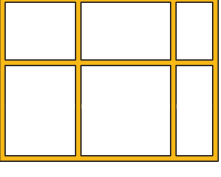
④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

9. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

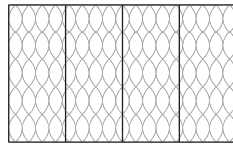
- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

10. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40)
- ② (1200, 40)
- ③ (600, 30)
- ④ (1200, 30)
- ⑤ (450, 60)

11. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 60m^2 ② 70m^2 ③ 80m^2
④ 90m^2 ⑤ 100m^2

12. 반지름이 r (cm)인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r$ (cm²)

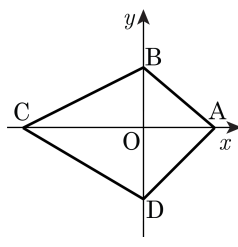
② r^2 (cm²)

③ $2r^2$ (cm²)

④ $\sqrt{2}r^2$ (cm²)

⑤ $\frac{r^2}{2}$ (cm²)

13. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

14. 부등식 $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$ 이 절대부등식이 되기 위한 정수 a 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

15. 다음 중 절대부등식 $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a = b$

② $ab > 0$

③ $a = b = 0$

④ $a > b$

⑤ $b > a$

16. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$	㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
㉢ $x^2 < x + 12$	㉣ $x^2 + 1 > x$

- ① ㉡
- ② ㉠, ㉢
- ③ ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

17. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

$\textcircled{\text{㉠}} \quad x^2 \geq 0$

$\textcircled{\text{㉡}} \quad x^3 \geq 0$

$\textcircled{\text{㉢}} \quad |x| + |y| > 0$

- ① $\textcircled{\text{㉠}}$

② $\textcircled{\text{㉡}}$

③ $\textcircled{\text{㉢}}$
- ④ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$

⑤ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

18. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a > 20, b > 25$

② $a \geq 20, b > 25$

③ $a > 20, b = 25$

④ $a = 20, b > 25$

⑤ $a = 20, b < 25$

19. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a| - |b| \geq |a - b|$

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

④ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

⑤ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$

20. 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ $-x^2 + 4x - 6 < 0$

㉡ $x^2 - 6x + 9 > 0$

㉢ $x^2 - 2x + 4 \geq 0$

㉤ $a = b < 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

㉥ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

- ① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

21. 실수 a, b, c, x, y 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

- ☐㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- ☐㉡ $x^2 - x + 1 > 0$
- ☐㉢ $|a + b| \leq |a| + |b|$
- ☐㉣ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- ☐㉤ $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- ☐㉥ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개
- ② 5개
- ③ 4개
- ④ 3개
- ⑤ 2개

22. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $b \leq 4a^2$

23. 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 항상 성립할 조건은 $a \{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \} 0, b^2 - 4ac \{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \} 0$ 이고, $ax^2 + bx + c \leq 0$ 이 항상 성립할 조건은 $a \{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \} 0, b^2 - 4ac \{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \} 0$ 이다. 이 때, $\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \} \sim \{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \}$ 의 []안에 들어갈 부등호를 순서대로 적으면?
- ① $>, <, <, \geq$

② $>, >, <, \leq$

③ $>, <, \leq, <=$

④ $>, >, \leq, \leq$

⑤ $>, <, <, \leq$

24. 다음은 a, b, c 가 실수일 때 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \\ & ([가]) (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} ([나]) 0 \\ & a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0 \text{ (단, 등호는 } a = b = 0 \text{ 일} \\ & a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca) \\ & \text{때 성립)} \end{aligned}$$

- ① $\frac{1}{2}, >$ ② $\frac{1}{2}, \geq$ ③ $2, >$ ④ $2, \geq$ ⑤ $2, =$

25. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉔] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ [㉔]} \geq 0 \end{aligned}$$

- ① $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
- ② $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$
- ③ $(a + b)^2 - (b + c)^2 - (c + a)^2$
- ④ $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
- ⑤ $(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2$

26. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의
최솟값을 구하여라.

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

27. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

28. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

29. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

30. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

31. $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$$

이고,

등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$$

그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$

곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.

또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① abc , $a = b = c = 1$

② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a = b = c = 1$

④ abc , $a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a = b = c = 2$

32. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

33. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

 답: _____

 답: _____

34. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

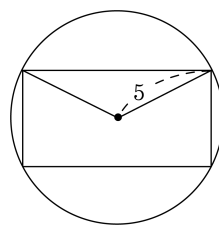
③ 23

④ 25

⑤ 27

35. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에
 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값
 은?

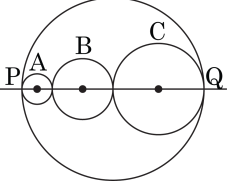
- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



36. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1 , x_2 , x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

37. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$
 ② $6\sqrt{35}$
 ③ $8\sqrt{35}$
- ④ $10\sqrt{35}$
 ⑤ $12\sqrt{35}$