1. $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이라 한다. X 의 임의의 원소 x에 대하여 다음과 같은 X에서 Y로의 대응을 생각할 때, 이 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x+3$

② $x \rightarrow x^2-1$

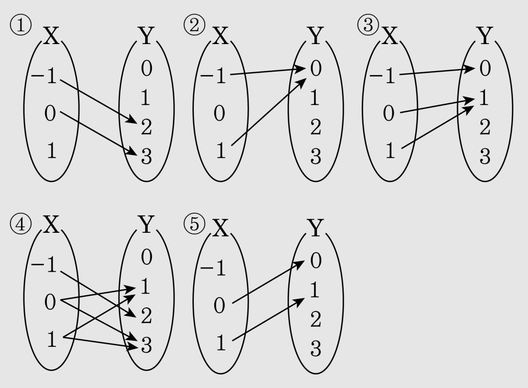
③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$

⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X에서 Y로의 함수가 되려면 X의 원소가 빠짐없이 Y의 원소 하나에 대응해야 한다.
순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y의 원소에 대응하지 않는 X의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X의 원소 하나가 Y의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

2. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

3. 공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$
즉 $x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$
$x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
X는 집합 $\{-2,\ 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.
따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

4. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f : X \to Y$와 함수 $g : Y \to Z$가 $f(1) = a$, $g(c) = 6$, $(g \circ f)(2) = 4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은 얼마인가?

① a　　② b　　③ c

④ b, c　　⑤ a, b, c

해설

$f(x)$가 일대일대응이므로
$f(2) = b$ 또는 $f(2) = c$이어야 한다.
(i) $f(2) = b$인 경우 $f(1) = a$이므로 $f(3) = c$
(ii) $f(2) = c$인 경우 $g(c) = 6$이므로
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 6$
그런데 문제의 조건에서
$(g \circ f)(2) = 4$이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3) = c$이다.

해설

f와 g가 일대일대응이면
$g \circ f$도 일대일대응이다.
$(g \circ f)(2) = 4$에서
$g(f(2)) = 4$이므로 $f(2) \neq c$
또, $f(1) = a$이고 f가 일대일대응이므로
$f(2) = b$이어야 한다.
$\therefore f(3) = c$

5. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12　② 16　③ 24　④ 32　⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$(개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
$\therefore\ n = 4$
$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는
$2^n = 2^4 = 16$(개)

6. 함수 $f(x)=ax+b$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3,\ -2)$를 지날 때, $a+b$의 값은 얼마인가?

① -2　　② 0　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -2)$를 지나므로
$f(3)=-2 \quad \therefore 3a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프도
점 $(3,\ -2)$를 지나므로
$f^{-1}(3)=-2 \quad \therefore f(-2)=3$
$\therefore -2a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=1$
$\therefore a+b=0$

7. 두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여 $\left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ g \\ &= \left(g\circ g^{-1}\right)\circ f^{-1}\circ g \\ &= f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2) &= (f^{-1}\circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$ 라고 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$4a+1=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)=-\frac{1}{2}$

8. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$ 이고 $f(3x-4) = g(x)$ 라 할 때, $g^{-1}(3)$ 의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

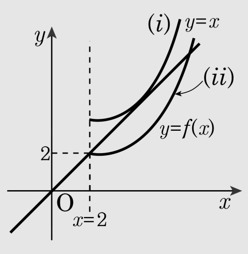
해설

$g^{-1}(3) = k$ 라 하면 $g(k) = 3$
$\therefore f(3k-4) = g(k) = 3$
$f^{-1}(3) = 3k-4 = 2$ 이므로 $k = 2$
$\therefore g^{-1}(3) = 2$

9. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$ ② $k < \frac{25}{4}$ ③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$ ⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설



주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.
따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 접할 때,
$x^2 - 4x + k = x,\ x^2 - 5x + k = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D = 5^2 - 4k = 0$
$\therefore \mathrm{k} = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

10. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 $f,\ g$ 가 $f(2) = 5,\ g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

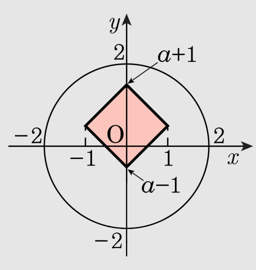
함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

11. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$, $q : |x| + |y - a| \le 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \le a \le 1$

④ $-1 \le a \le 1$ ⑤ $-2 \le a \le 2$

해설



두 조건 $p : x^2 + y^2 \le 4$,
$q : |x| + |y - a| \le 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$ 이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
반지름의 길이가 2인 원이고,
$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는
$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid |x| + |y - a| \le 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \le 2$, $a - 1 \ge -2$
$\therefore -1 \le a \le 1$

12. 집합 $A = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$에 대하여

함수 $f : A \to A$를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다.

이때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\cdots$)

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

$\vdots$

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \left\{f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$\quad + \left\{f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$

13. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이고, 다음을 만족한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

Ⅰ. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $g(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ Ⅱ. $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

① $g(0)=1$　　② $g(1)=0$

③ $g(2)=-1$　　④ $g(-1)=-2$

⑤ $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$

해설

Ⅰ. 에서 $x=y$ 라 하면
$g(0)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2 \ \cdots$ ㉠
ⅰ) ㉠에서 $x=0$ 라 하면

$$g(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2$$

그런데 Ⅱ. 에서 $f(0)=0$ 이므로
$g(0)=\{g(0)\}^2 \quad \therefore\ g(0)=0,\ 1$
만약, $g(0)=0$ 라고 하면,
㉠에서 $0=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ 이고
함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이므로
$f(x)=0$ 가 된다.
이것은 Ⅱ. 에서 $f(1)=1$ 이라는 것에 모순이다.
따라서 $g(0)=1 \ \cdots$ ①
㉠에 의해서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1 \ \cdots$ ⑤
ⅱ) ⑤에서 $x=1$ 라 하면

$$1=\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2$$

그런데 Ⅱ. 에서 $f(1)=1$ 이므로
$g(1)=0 \ \cdots$ ②
ⅲ) ⑤에서 $x=-1$ 라 하면

$$1=\{f(-1)\}^2+\{g(-1)\}^2$$

그런데 Ⅱ. 에서 $f(-1)=-1$ 이므로
$g(-1)=0 \ \cdots$ ④
Ⅰ. 에서 $x=1,\ y=-1$ 라 하면
$g(2)=f(1)f(-1)+g(1)g(-1)$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(-1)=-1,\ f(1)=1$ 이고,
②, ④에 의해 $g(1)=0,\ g(-1)=0$ 이므로
$g(2)=-1 \ \cdots$ ③

14. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 두 함수 $f,\ g$가 일대일 대응이고 $f(2) = 1$, $g(3) = 3$, $(f \circ g)(1) = 2$일 때, $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$g(3) = 3$이고 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 2$이다.
만약 $g(1) = 2$ 라고 가정하면
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.
그러나 문제의 조건에서 $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.
따라서 $g(1) = 1$ 이다.
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고
$(f \circ g)(1) = 2$ 이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$ 이다.
$g(1) = 1$, $g(3) = 3$ 이므로 $g(2) = 2$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

15. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 X 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

(가) f 의 역함수가 존재한다. (나) $f(1) = f^{-1}(1)$

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.

i) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,
일대일 대응 $\{2,\ 3,\ 4\} \rightarrow \{2,\ 3,\ 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)

ii) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,
$f(2) = 1$ 이므로 $\{3,\ 4\} \rightarrow \{3,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,
$f(3) = 1$ 이므로 $\{2,\ 4\} \rightarrow \{2,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

iv) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,
$f(4) = 1$ 이므로 $\{2,\ 3\} \rightarrow \{2,\ 3\}$ 의 개수는
$2 \cdot 1 = 2$ (개)

따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$