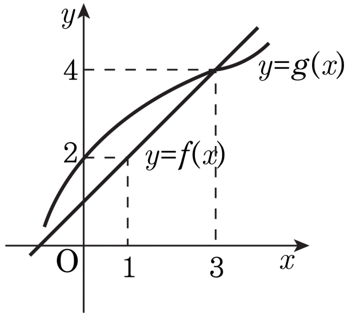
1. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)$의 값은 얼마인가?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)=g^{-1}(f(1))+4$

$=g^{-1}(2)+4$

$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$

문제의 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가

$(0,2)$를 지나므로 $g(0)=2$

이 때, $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $k=0$

$\therefore g^{-1}(2)+4=0+4=4$

2. $\dfrac{b}{a}=2,\ \dfrac{c}{b}=3$일 때, $\dfrac{a+b}{b+c}$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{3}{5}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

$b=2a$이므로 $c=3b=3(2a)=6a$

$$\therefore\ \frac{a+b}{b+c}=\frac{a+2a}{2a+6a}=\frac{3}{8}$$

3. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \to |x|^2$

㉡ $g : x \to x+2$

㉢ $h : x \to |x|+1$

㉣ $i : x \to x^2-1$

㉤ $j : x \to |x|+3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1+2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2+2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

4. $f(x) = x^2 + 1(x \geq 0)$, $g(x) = x^2 - 6x + 10(x \geq 3)$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 6 ③ 4 ④ 3 ⑤ 0

해설

$(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$

$\therefore \ (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(10)$

$g^{-1}(10) = k$ 라 하면, $g(k) = 10$ 이다.

$\therefore \ k^2 - 6k + 10 = 10$

$\therefore \ k = 6 \ \ (\because \ k \geq 3)$

5. 함수 $f(x) = \sqrt{7-3x}$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f^{-1}(1) = a$라 하면 $f(a) = \sqrt{7-3a} = 1$

$7-3a = 1,\ a = 2$

$\therefore\ f^{-1}(1) = 2$

이때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(f^{-1}(1))$

$= f^{-1}(2)$ 이므로

$f^{-1}(2) = b$라 하면 $f(b) = \sqrt{7-3b} = 2$

$7-3b = 4\ ,\ b = 1$

$\therefore\ f^{-1}(2) = 1$

$\therefore\ (f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(2) = 1$

6. 직선 $y = m|x-1|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

해설

$y = m|x-1|+2$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 $(1,\ 2)$을 지난다.

x절편은 ㉠에서 $x = \dfrac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \dfrac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는

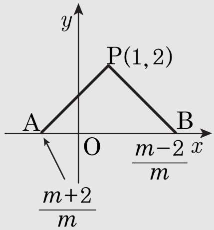
$\dfrac{m-2}{m} - \dfrac{m+2}{m} = \dfrac{-4}{m}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{PAB}$의 면적이 10이므로

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\dfrac{2}{5}$



해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

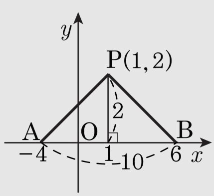
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m|x-1|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m|6-1|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\dfrac{2}{5}$



7. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2009|$ 은 $x = a$ 에서 최솟값을 가진다. 이때, a 의 값은?

① 1001 ② 1002 ③ 1003 ④ 1004 ⑤ 1005

해설

$f(x) = |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2009|$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 갖는 경우는

$x = \dfrac{1+2009}{2} = 1005$ 일 때이다.

$\therefore\ a = 1005$

8. 다음은 $\dfrac{x^2-x-3}{x-1}-\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$를 계산하는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 차례대로 구하고 풀이를 완성하여 그 값을 바르게 구한 것은?

$$\frac{x^2-x-3}{x-1}=(㉠)+\frac{(㉡)}{x-1}$$
$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=(㉢)+\frac{(㉣)}{x+1}$$

① $-x, +3, x, -1, \dfrac{2x+4}{x^2-1}$
② $x, -3, x, -1, -\dfrac{2x+4}{x^2-1}$
③ $x, 3, x, 1, -\dfrac{2x+4}{x^2+1}$
④ $x, -1, x, -3, -\dfrac{2x-4}{x^2-1}$
⑤ $x, 1, x, 3, -\dfrac{2x+4}{x^2+1}$

해설

$$\frac{x^2-x-3}{x-1}=\frac{x(x-1)-3}{x-1}=x+\frac{-3}{x-1}$$
$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{x(x+1)-1}{x+1}=x+\frac{-1}{x+1}$$

$\therefore$ ① $=x$, ② $=-3$, ③ $=x$, ④ $=-1$

$$(\text{준식})=x-\frac{3}{x-1}-\left(x-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}$$
$$=\frac{x-1-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=-\frac{2x+4}{x^2-1}$$

9. 양수 a, b가 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$을 만족할 때, $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}+5$의 값을 구하면?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a+b}$

$(b-a)(b+a)=ab$

$\therefore\ b^2-a^2=ab$

$b^2-a^2=ab$의 양변을 제곱하면

$a^4-2a^2b^2+b^4=a^2b^2$

$\therefore\ a^4+b^4=3a^2b^2$

$\therefore\ \frac{a^4+b^4}{a^2b^2}+5=3+5=8$

10. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x 에 대하여 풀면, $x=\dfrac{3y+4}{y+2}$

x 와 y 를 바꾸면, $y=f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$ 은 $x=-3$ 일 때, 최솟값 6을 갖는다.

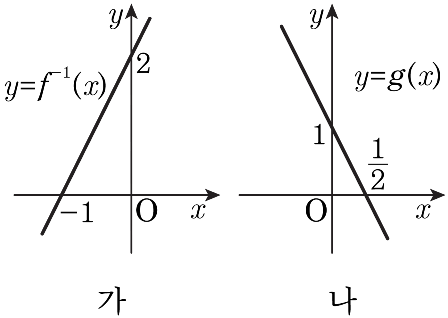
11. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -2)$
② $(-3,\ -1)$
③ $(1,\ 1)$
④ $(-2,\ -2)$
⑤ $(1,\ 1)$, $(-2,\ -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x좌표는
$f(x) = x$의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$에서
$x^2 + x - 2 = 0$
$x = 1, -2$
$x = 1(\because\ x \geq -1)$
$\therefore\ \mathrm{P} = (1, 1)$

12. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

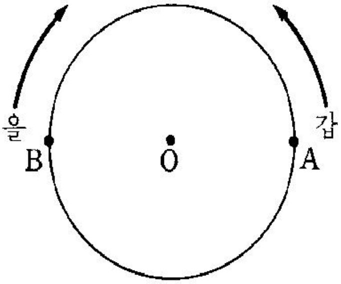
① $y=-f(x+1)$ ② $y=f(x-1)$ ③ $y=-f(x-1)$

④ $y=f(x+1)$ ⑤ $y=-f(1-x)$

해설

그림 (가) 의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나) 의 그래프와 일치한다.
즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y=f^{-1}(-x)\cdots$ ㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$ ㉡이다.
㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$ ㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.
$\therefore y=-f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

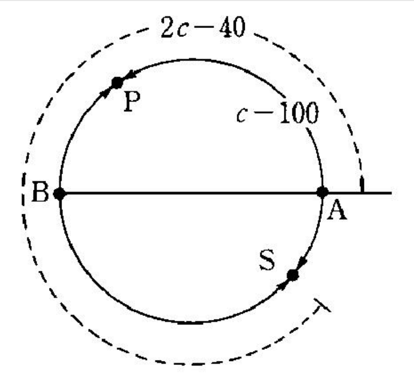
13. 갑, 을 두 사람이 원형 트랙의 반대편 두 지점 A, B 에서 동시에 일정한 속도로 서로 반대 방향으로 출발하였다. 을이 100 m 를 갔을 때 두 사람은 처음 만났고, 갑이 A 지점을 40 m 남겨 두고 두번째 만났다면 트랙 한 바퀴의 둘레의 길이는? (단, 두번째 만날 때까지 두 사람은 아직 트랙을 한 바퀴도 돌지 못했다고 한다.)



① 260 m　　② 390 m　　③ 520 m

④ 650 m　　⑤ 780 m

해설



트랙 둘레의 길이를 $2c$ 라 하고, A, B를 출발점 P, S 를 각각 첫 번째, 두 번째로 만나는 점이라고 하자.
점 P 까지의 갑, 을의 이동 거리는 갑 : $c-100$, 을 : 100
S 까지의 갑, 을의 이동 거리는 갑 : $2c-40$, 을 : $c+40$
문제의 뜻으로부터 두 사람의 이동 속도가 일정하고 P, S 점까지 이동하는 데 걸린 시간이 같으므로
갑, 을의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

시간 : $\dfrac{\text{이동거리}}{\text{속도}}$ 에서

$\dfrac{c-100}{v_1}=\dfrac{100}{v_2}\cdots$ ㉠

$\dfrac{2c-40}{v_1}=\dfrac{c+40}{v_2}\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{c-100}{2c-40}=\dfrac{100}{c+40}$

$(c-100)(c+40)=100(2c-40)$

$c^2-60c-4000=200c-4000$

$c^2-260c=0,\ c(c-260)=0$

$\therefore c\neq 0$ 이므로 $c=260$

따라서 트랙의 길이는 $2c=520$ (m)

14. $\sqrt{17+\sqrt{288}}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}+1$ ② $\sqrt{3}+1$ ③ $\sqrt{2}-1$

④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\sqrt{5}-2$

해설

$\sqrt{17+\sqrt{288}}$

$=\sqrt{17+2\sqrt{72}}$

$=\sqrt{9}+\sqrt{8}$ ($\leftarrow 17=9+8,\ 72=9\times 8$)

$=3+2\sqrt{2}$ ($\leftarrow \sqrt{2}=1.4\times\times$)

$=5.8\times\times$ 이므로 소수부분은 $3+2\sqrt{2}-5$이다.

$\therefore\ x=2\sqrt{2}-2\ \ \therefore x+2=2\sqrt{2}$

또, $x^2+4x+4=(x+2)^2$이므로

$x^2+4x=(x+2)^2-4=(2\sqrt{2})^2-4=4$

따라서 준식에 $x+2=2\sqrt{2}$

$x^2+4x=4$를 대입시키면

$$\sqrt{\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

15. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $a-b=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$가 성립할 때, a^2+ab+b^2 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\} \\ &= \frac{1}{2}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5}+3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\} \\ &= \frac{1}{4}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5}-2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore\ a^2+ab+b^2=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$$