

1. 다음 중 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -1

② 1

③ 2

④ $1 + 2i$

⑤ $1 - 2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$$

$$(x + 1)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = 0$$

$$\therefore x = -1, 2, 1 + 2i, 1 - 2i$$

따라서 근이 아닌 것은 1 이다.

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

3. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

4. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p, y = q$ 또는 $x = r, y = s$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy - y^2 = 6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x = 2y + 1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ②에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$$

$$\therefore y = 2, -3$$

$y = 2, y = -3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x = 5, x = -5$$

$$\therefore x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -5, y = -3$$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{cases} x-y=1 \cdots \textcircled{A} \\ x^2+y^2=5 \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

②를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$$

$$5=1^2+2xy$$

$$\therefore xy=2$$

7. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k 의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$ 이

서로 다른 두 실근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

$$8 - k^2 - 2k > 0, (k+4)(k-2) < 0$$

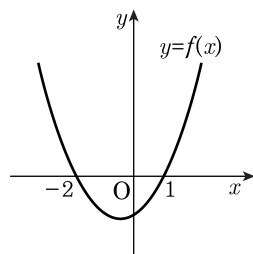
$$\therefore -4 < k < 2$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이다.

$$\therefore (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$$

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1



해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a, 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

9. 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y 절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 (t, t^2) 으로 놓으면
 $y' = 2x$ 이므로 $y'_{x=t} = 2t$ 는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
 $y - t^2 = 2t(x - t) \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에도 접하므로
 $2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
 $x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$ 이므로
 $(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$ 에서
 $(t + 1)(t - 2) = 0 \quad \therefore t = -1, 2$
 $\textcircled{1}$ 에서
 $t = -1$ 일 때, $y = -2x - 1$
 $t = 2$ 일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y 절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

10. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x + a)^2 + 2a^2 + 8a$$

$$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a + 2)^2 - 8$$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

11. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{1}$
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
 $t \geq 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 범위에서 $\textcircled{1}$ 의 최솟값은
 $t = 2$ 일 때 1이다.

12. 가로와 세로의 길이의 합이 12 인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

가로의 길이를 x 라고 두면 세로의 길이는 $12 - x$ 이다.

$$y = x \times (12 - x)$$

$$= -x^2 + 12x$$

$$= -(x^2 - 12x + 36) + 36$$

$$= -(x - 6)^2 + 36$$

따라서 36이 최댓값이다.

13. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24 - 2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때,
부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24 - 2x = 12 \text{ cm}$ 이다.

14. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 v m 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25 m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ 답 : m/s

▷ 정답 : 50 m/s

해설

$$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x - 1)^2 + \frac{v}{10} + 20$$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10} + 20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} + 20 = 25$ 이므로 $v = 50$ 이다.
따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

15. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나) 를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
(나) 다음 날은 집에서 어제 걸어난 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 1680$

② (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 3360$

③ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

④ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 3360$

⑤ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m
(가) $\frac{x}{60} + 3 + \frac{y}{500} = 10$, $\frac{x}{60} + \frac{y}{500} = 7$
 $\therefore 25x + 3y = 10500$
(나) $\frac{x+y}{60} = 28$
 $\therefore x + y = 1680$

16. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$ 을 동시에 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

구하는 순서쌍 (x, y) 는 연립방정식

$$\begin{cases} (x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots\cdots\textcircled{A} \\ x^2-y^2=0 & \cdots\cdots\textcircled{B} \end{cases} \text{의 해이다.}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $y=\pm(x-1)$ $\cdots\cdots\textcircled{C}$

$\textcircled{B}$ 을 $\textcircled{C}$ 에 대입하면 $x^2-(x-1)^2=0$, $2x-1=0$

$$\therefore x=\frac{1}{2}, \textcircled{C}\text{에서 } y=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (x, y)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ 2개

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x , y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots \textcircled{A}$
 $4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{B}$ 식 $+2 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$
 $\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$
 $\textcircled{A}$: $3x = y$ 를 $\textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7x^2 = 7 \quad x = 1(x > 0), \quad y = 3$
 $\therefore x + y = 4$
 $\textcircled{A}$: $2x = 3y$ 를 $4 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, y = 2(y > 0), x = 3$
 $\therefore x + y = 5$
 $a > b$ 이므로 $a = 5, b = 4$
 $\therefore a - b = 1$

18. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t + 4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

19. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$ 의 공통근이 2이므로 $x = 2$ 를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$$2^2 - 2a + 10 = 0, \quad 2^2 + 2 + b = 0$$

$$\therefore a = 7, \quad b = -6$$

이 때, $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \text{이므로 } x = 2, 5$$

또, $x^2 + x - 6 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \text{이므로 } x = 2, -3$$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은

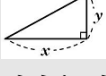
5, -3 이므로 두 근의 합은 2이다.

20. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x + y = 21 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{ 이다.}$$

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$$

$$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$$

$$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$$

$$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$$

$$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$$

$$(x - 12)(x - 9) = 0 ,$$

$$x = 12 \text{ 또는 } x = 9$$

$$x = 12 \text{ 일 때 } y = 9$$

$$x = 9 \text{ 일 때 } y = 12$$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

21. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
 $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
 $(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2, y = -2$
 $\therefore xy = -4$

22. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

- ① 1

② 2

③ 3
- ④ 4

⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$
 $(m - 4)(n - 2) = 8$
 $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1$ 이므로
 $(m, n) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$
 $\therefore$ 4쌍의 (m, n) 이 존재한다.

23. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x - 3 = m(x + 2)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y = x^2 = 2x - 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = m(x + 2) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

이라 하면 직선 $\textcircled{2}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.

이 때, 교점의 x 좌표가 1 과 2 사이에 존재해야 하므로

(i) 직선 $\textcircled{2}$ 이

점 $(1, 0)$ 을 지날 때

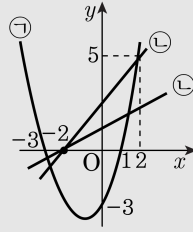
$$3m = 0 \quad \therefore m = 0$$

(ii) 직선 $\textcircled{2}$ 이 점 $(2, 5)$ 를 지날 때

$$4m = 5 \quad \therefore m = \frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 $0 < m < \frac{5}{4}$

따라서, 정수 m 의 값은 1 하나뿐이다.



24. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$$i) a = -\frac{3}{8} \text{ 대입 :}$$

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$$ii) a = 3 \text{ 대입 : } -12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$$

따라서 $a = 3$ 이다.

25. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6 \\ &= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3 \\ & x, y \text{ 는 실수이므로 } (x - 2)^2 \geq 0, (y + 1)^2 \geq 0 \\ & \therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3 \\ & \text{따라서, } x = 2, y = -1 \text{ 일 때 최솟값은 } -3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

26. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$$

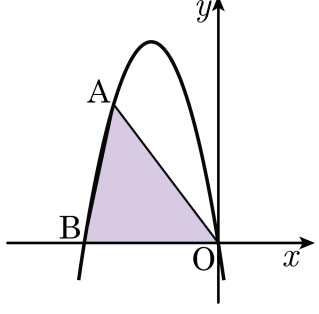
이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$$

$$y^2 - y - 6 \leq 0, (y + 2)(y - 3) \leq 0$$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

27. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



- ① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.
 따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점 $(0, 0), (-6, 0)$ 을 지나므로,
 $0 = c, 0 = -36 - 6b$
 $b = -6, c = 0$
 $y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$
 $\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의 넓이가 최대가 된다.
 즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로
 $\triangle OAB$ 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

28. 오차방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 허근을 α, β 라 할 때,

$\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

$\therefore x+1=0$ 또는

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

(i) $x+1=0$ 에서 $x=-1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

$$= 0 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

이 때, $x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$$\textcircled{1} x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 일 때, } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\textcircled{2} x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 일 때, } x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이므로

두 허근 α, β 의 합은

$\alpha + \beta = 1$ 이다.

29.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ $\frac{18}{5}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10$ ㉠
 $x + |y| - y = 12$ ㉡
 $x \leq 0$ 이면, $y = 10, x = 12$
 이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.
 $x > 0$ 이면 $2x + y = 10$㉢
 $y \geq 0$ 이면 $x = 12, y = -14$
 이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.
 $y < 0$ 이면, $x - 2y = 12$㉣
 ㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$
 $\therefore x + y = \frac{18}{5}$

30. 방정식 $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$5y^2 + 2(x+6)y + (2x^2 + 6x + 9) = 0$$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (x+6)^2 - 5(2x^2 + 6x + 9) \\ &= -9x^2 - 18x - 9 = -9(x+1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2 = 0$

$$x+1 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

준식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$2 - 2y + 5y^2 - 6 + 12y + 9 = 0$$

$$5y^2 + 10y + 5 = 0$$

$$5(y+1)^2 = 0$$

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x + y = -2$$

31. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 아닌 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

- ① 5
- ② 7
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 13

해설

$x^2-3xy+2y^2 = -6$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y) = -6$ 이 때, x, y 는 양의 정수이므로 $x-y, x-2y$ 도 정수이고 $x-y > x-2y$ 이다.

따라서, $x-y, x-2y$ 의 값은 다음 표와 같다.

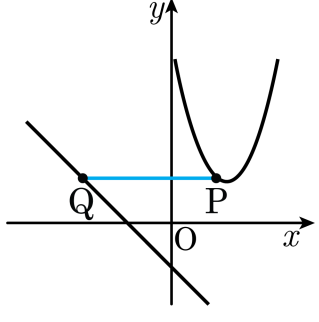
$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 x, y 의 값은

$$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{또는}$$

$$\begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$$

32. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 5x + 8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 - 5x + 8$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2 - 5a + 8)$

$y = -x - 2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b, -b - 2)$

점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로

$a^2 - 5a + 8 = -b - 2, b = -a^2 + 5a - 10$ 이다.

$\overline{PQ} = a - b = a^2 - 4a + 10 = (a - 2)^2 + 6$

$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 6 이다.

33. 실수 x, y 가 $2x^2 + y^2 = 4x$ 를 만족할 때 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면, $M - m$ 의 값은 얼마인가?

① 3

② $\frac{7}{2}$

③ 4

④ $\frac{9}{2}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2 = -2x^2 + 4x$ 를 $x^2 + y^2$ 에 대입하면

$$-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \cdots \textcircled{1}$$

x, y 가 실수이므로

$$-2x^2 + 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2 \cdots \textcircled{2}$$

② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는

$x = 0$ 일 때 최솟값 0, $x = 2$ 일 때 최댓값 4 이다.

$$\therefore M - m = 4$$

34. 삼차방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 $f(n) = \frac{\omega^{2n}}{1 + \omega^n}$ 으로 정의하자. 이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ $-\frac{9}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ 0

해설

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$n = 3\alpha, 3\alpha + 1, 3\alpha + 2 \text{라 하자}$$

i) $n = 3\alpha$

$$f(n) = \frac{\omega^{2n}}{1 + \omega^n}$$

$$= \frac{(\omega^3)^{2\alpha}}{1 + (\omega^3)^\alpha} = \frac{1}{2}$$

ii) $n = 3\alpha + 1$

$$f(n) = \frac{(\omega^3)^{2\alpha} \times \omega^2}{1 + (\omega^3)^\alpha \times \omega}$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega + 1}$$

$$= \frac{\omega^2}{-\omega^2} = -1$$

iii) $n = 3\alpha + 2$

$$f(n) = \frac{(\omega^3)^{2\alpha} \times \omega^4}{1 + \omega^{3\alpha} \times \omega^2}$$

$$= \frac{\omega^4}{1 + \omega^2} = \frac{\omega}{-\omega} = -1$$

$$\therefore f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$$

$$= (-1 + -1 + \frac{1}{2}) + (-1 + -1 + \frac{1}{2}) + (-1 + -1)$$

$$= -5$$