1. 다음 중 방정식 $x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$의 근이 아닌 것은?

① -1　　② 1　　③ 2

④ $1+2i$　　⑤ $1-2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$

$(x+1)(x^3-4x^2+9x-10)=0$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$

$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 2,\ 1+2i,\ 1-2i$

따라서 근이 아닌 것은 1이다.

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

3. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

4. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2 ② $-1+\sqrt{2}$, -3 ③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p,\ y = q$또는 $x = r,\ y = s$이다. $p + q + r + s$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots ㉠ \\ xy - y^2 = 6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x = 2y + 1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$

$\therefore\ y = 2,\ -3$

$y = 2,\ y = -3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x = 5,\ x = -5$

$\therefore\ x = 5,\ y = 2$ 또는 $x = -5,\ y = -3$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x - y = 1 \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$

$5 = 1^2 + 2xy$

$\therefore\ xy = 2$

7. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

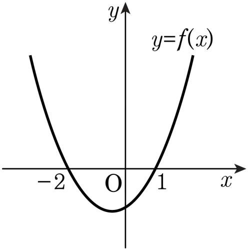
$8 - k^2 - 2k > 0$, $(k+4)(k-2) < 0$

$\therefore\ -4 < k < 2$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이다.

$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

8. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

9. 두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+2x-5$에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y절편의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y=x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$으로 놓으면

$y'=2x$이므로 $y'_{x=t}=2t$는 접선의 기울기이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)\cdots$ ㉠

㉠이 곡선 $y=-x^2+2x-5$에도 접하므로

$2tx-t^2=-x^2+2x-5$ 에서

$x^2+2(t-1)x+(5-t^2)=0\cdots$ ㉡

㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4}=0$이므로

$(t-1)^2-(5-t^2)=0$에서

$(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore\ t=-1,\ 2$

㉠에서

$t=-1$일 때, $y=-2x-1$

$t=2$일 때, $y=4x-4$

따라서 두 y절편의 곱은 $(-1)\cdot(-4)=4$

10. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x+a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a+2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

11. 함수 $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$t=x^2-2x+3$ 으로 놓으면

$y=t^2-2t+1=(t-1)^2 \cdots$ ㉠

또, $t=(x-1)^2+2$ 이므로

$t \geq 2 \cdots$ ㉡

㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은

$t=2$ 일 때 1 이다.

12. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 12 인 직사각형의 넓이를 y라고 할 때, y의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

가로의 길이를 x 라고 두면 세로의 길이는 $12-x$ 이다.

$$
\begin{aligned}
y &= x \times (12-x) \\
&= -x^2 + 12x \\
&= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\
&= -(x-6)^2 + 36
\end{aligned}
$$

따라서 36 이 최댓값이다.

13. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24-2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24-2x=12$ cm 이다.

14. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 vm 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25 m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ **답 :** ______ m/s

▷ **정답 :** 50 m/s

해설

$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x-1)^2 + \frac{v}{10} + 20$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10}+20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10}+20 =$

25 이므로 $v = 50$ 이다.

따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

15. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다. (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10,\ \frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

16. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases}(x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $y=\pm(x-1)$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(x-1)^2=0$, $2x-1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$, ㉢에서 $y=\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 2개

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠

$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡

㉡ 식+2×㉠식에 대입하면

$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ $(3x-y)(2x-3y) = 0$

$\therefore\ 3x = y$ *or* $2x = 3y$

㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면

$7x^2 = 7$ $x = 1(x > 0)$, $y = 3$

$\therefore\ x + y = 4$

㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면

$7y^2 = 28$, $y^2 = 4$, $y = 2(y > 0)$, $x = 3$

$\therefore\ x + y = 5$

$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$

$\therefore\ a - b = 1$

18. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

19. x에 대한 두 이차방정식 $x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - ax + 10 = 0$, $x^2 + x + b = 0$의 공통근이 2이므로 $x = 2$를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$2^2 - 2a + 10 = 0,\ 2^2 + 2 + b = 0$

$\therefore\ a = 7,\ b = -6$

이 때, $x^2 - 7x + 10 = 0$에서

$(x-2)(x-5) = 0$이므로 $x = 2,\ 5$

또, $x^2 + x - 6 = 0$에서

$(x-2)(x+3) = 0$이므로 $x = 2,\ -3$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은

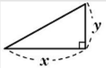
$5,\ -3$이므로 두 근의 합은 2이다.

20. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x + y = 21 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots ② \end{cases}$$ 이다.

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$

$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$

$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$

$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$

$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$

$(x - 12)(x - 9) = 0$,

$x = 12$ 또는 $x = 9$

$x = 12$ 일 때 $y = 9$

$x = 9$ 일 때 $y = 12$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

21. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$

$(x+y)^2+(x-2)^2=0$

$x,\ y$가 실수이므로 $x+y=0,\ x-2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-4$

22. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5개 이상

해설

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

$(m-4)(n-2)=8$

$8=1\times8=2\times4=4\times2=8\times1$이므로

$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$

$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$이 존재한다.

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y = x^2 = 2x-3 \cdots\cdots ㉠ \\ y = m(x+2) \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 교점의 x좌표가 1과 2사이에 존재해야 하므로

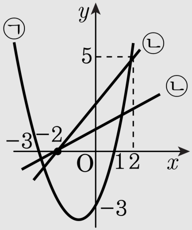
(ⅰ) 직선 ㉡이

점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$

(ⅱ) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$



(ⅰ), (ⅱ)에서 $0<m<\frac{5}{4}$

따라서, 정수 m의 값은 1하나뿐이다.

24. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3　② $-\frac{3}{8}$　③ $\frac{3}{8}$　④ 3　⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x-2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$

$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$

$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$i)\ a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$ii) a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

25. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$

$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$

$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$

$x,\ y$ 는 실수이므로 $(x-2)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$

$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$

따라서, $x=2,\ y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

26. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

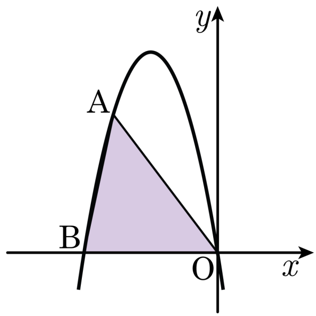
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-4x+y^2-y-2=0$
이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-\left(y^2-y-2\right)\geq 0$$
$y^2-y-6\leq 0$, $(y+2)(y-3)\leq 0$
$\therefore -2\leq y\leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

27. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, △OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
△OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때
△OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
△OAB 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times 9=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$

28. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서
$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$
$\therefore\ x+1=0$ 또는
$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$
(i) $x+1=0$에서 $x=-1$
(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$

$$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이 때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면
$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

①$x+\dfrac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

②$x+\dfrac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

두 허근 α, β의 합은
$\alpha+\beta=1$이다.

29. $\begin{cases} |x|+x+y=10 \\ x+|y|-y=12 \end{cases}$ 일 때, $x+y$의 값은?

① -2 ② 2 ③ $\dfrac{18}{5}$ ④ $\dfrac{22}{3}$ ⑤ 22

해설

$|x|+x+y=10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x+|y|-y=12 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$x \le 0$이면, $y=10$, $x=12$

이것은 $x \le 0$을 만족하지 않는다.

$x>0$이면 $2x+y=10 \cdots\cdots$ ㉢

$y \ge 0$이면 $x=12$, $y=-14$

이것은 $y \ge 0$을 만족하지 않는다.

$y<0$이면, $x-2y=12 \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $x=\dfrac{32}{5}$, $y=-\dfrac{14}{5}$

$\therefore \quad x+y=\dfrac{18}{5}$

30. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\dfrac{D}{4}\geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(x+6)^2-5(2x^2+6x+9)\\&=-9x^2-18x-9=-9(x+1)^2\geq 0\end{aligned}$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

준식에 $x=-1$ 을 대입하면

$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$

$5y^2+10y+5=0$

$5(y+1)^2=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ x+y=-2$

31. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

① 5 ② 7 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2-3xy+2y^2 = -6$의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y) = -6$
이 때, x, y는 양의 정수이므로 $x-y$, $x-2y$도 정수이고 $x-y >$ $x-2y$이다.
따라서, $x-y$, $x-2y$의 값은 다음 표와 같다.

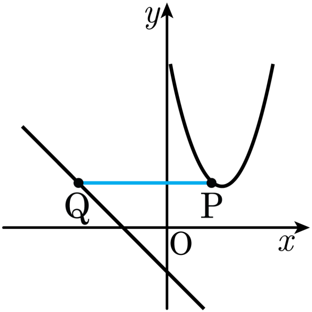
$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 x, y의 값은

$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$

32. 다음 그림에서 포물선 $y=x^2-5x+8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y=-x-2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=x^2-5x+8$ 에서 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(a, a^2-5a+8)$

$y=-x-2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}(b,\ -b-2)$

점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로

$a^2-5a+8=-b-2,\ b=-a^2+5a-10$ 이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=a-b=a^2-4a+10=(a-2)^2+6$

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 6 이다.

33. 실수 x, y 가 $2x^2+y^2=4x$ 를 만족할 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면, $M-m$ 의 값은 얼마인가?

① 3　　② $\frac{7}{2}$　　③ 4　　④ $\frac{9}{2}$　　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2=-2x^2+4x$ 를 x^2+y^2 에 대입하면

$-x^2+4x=-(x-2)^2+4\cdots$ ①

x, y 가 실수이므로

$-2x^2+4x\geq 0 \;\rightarrow\; x(x-2)\leq 0$

$\therefore\; 0\leq x\leq 2\cdots$ ②

② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는

$x=0$ 일 때 최솟값 0, $x=2$ 일 때 최댓값 4 이다.

$\therefore\; M-m=4$

34. 삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$으로 정의하자. 이 때, $f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$의 값은?

① -6 ② -5 ③ $-\dfrac{9}{2}$ ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ 0

해설

$x^3-1=0 \Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow \omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$n=3\alpha,\ 3\alpha+1,\ 3\alpha+2$라 하자

ⅰ) $n=3\alpha$

$$f(n)=\frac{\omega^{2n}}{1+\omega^n}$$

$$=\frac{(\omega^3)^{2\alpha}}{1+(\omega^3)^\alpha}=\frac{1}{2}$$

ⅱ) $n=3\alpha+1$

$$f(n)=\frac{(\omega^3)^{2\alpha}\times\omega^2}{1+(\omega^3)^\alpha\times\omega}$$

$$=\frac{\omega^2}{\omega+1}$$

$$=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$$

ⅲ) $n=3\alpha+2$

$$f(n)=\frac{(\omega^3)^{2\alpha}\times\omega^4}{1+\omega^{3\alpha}\times\omega^2}$$

$$=\frac{\omega^4}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

$\therefore\ f(1)+f(2)+\cdots+f(8)$

$$=(-1+-1+\frac{1}{2})+(-1+-1+\frac{1}{2})+(-1+-1)$$

$=-5$