

1. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24개

해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (개)

2. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

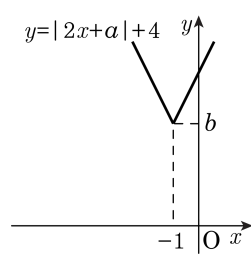
⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

3. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10



해설

$$y = |2x + a| + 4$$

$$= \left| 2 \left(x + \frac{a}{2} \right) \right| + 4$$

즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는
 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향
 으로

$-\frac{a}{2}$ 만큼,

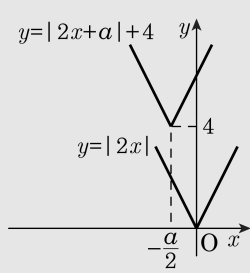
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} = -1, \quad b = 4$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 4 \quad \therefore ab = 8$$



4. 다음 보기의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x - 3$

㉡ $g(x) = x^2 + x$

㉢ $h(x) = |x| - 2$

㉣ $k(x) = x^3$

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉣은 증가함수이므로 일대일대응

㉡ $g(-2) = g(1) = 2$ 이므로
일대일대응이 아니다.

㉢ $h(-2) = h(2) = 0$ 이므로
일대일대응이 아니다.

그러므로 일대일대응인 것은 2 개이다.

5. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때, } (f \circ f)(x) \text{는 무엇인가?}$$

① $-x$

② $1-x$

③ $2x-3$

④ x

⑤ $x+2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{는 유리수}) \\ 1-x & (x \text{는 무리수}) \end{cases}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

(i) x 가 유리수일 때, $f(f(x)) = f(x) = x$

(ii) x 가 무리수이면 $1-x$ 도 무리수이므로,

$$f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$$

(i), (ii)에 의해서 $f(f(x)) = x$

6. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 라 할 때, 함수 $f : S \rightarrow S$ 는 일대일 함수이다.
 $f(1) = 2, f(3) = 4$ 이고, $(f \circ f \circ f)(5) = 1$ 이라 하면 $f(2)$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

해설

$f(1) = 2, f(3) = 4$ 이고, f 가 일대일 함수이므로 $f(5)$ 는 1, 3, 5 중의 하나이다.

i) $f(5) = 1$ 이라고 하면

$(f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(f(1)) = f(2) = 1$ 이므로 모순이다.

ii) $f(5) = 3$ 이라고 하면

$(f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(f(3)) = f(4) = 1$

$\therefore f(2) = 5$

iii) $f(5) = 5$ 라고 하면

$(f \circ f \circ f)(5) = f(f(f(5))) = f(f(5)) = f(5) = 1$ 이므로 모순이다.

$\therefore f(2) = 5$

7. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ 1

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } 2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

8. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

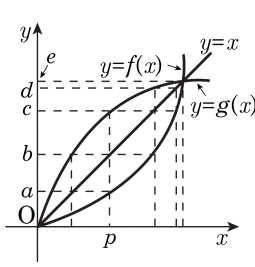
$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

9. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)
- ① a ② b ③ c
④ d ⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

10. 함수 $f(x) = \frac{kx}{3x+2}$ 에 대하여 $f = f^{-1}$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$y = \frac{kx}{3x+2} \text{ 로 놓으면 } 3xy + 2y = kx$$

$$(3y - k)x = -2y$$

$$\therefore x = \frac{-2y}{3y - k}$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = \frac{-2x}{3x - k}$$

$$\text{이 때, } f = f^{-1} \text{ 이므로 } \frac{kx}{3x+2} = \frac{-2x}{3x-k}$$

$$\therefore k = -2$$

11. 함수 $f(x) = 2x - 4$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

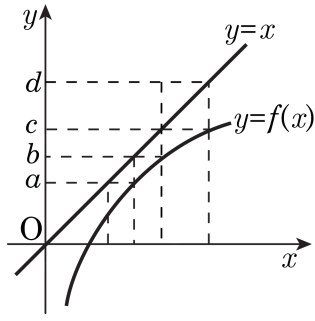
- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ 14

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는
두 점 $(0, -4)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선이다.
그런데 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
두 점 $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.
함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의
그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표를 구하기
위해 $f(x) = x$ 를 풀면 $2x - 4 = x$
 $\therefore x = 4$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로
그림에서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

12. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

13. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

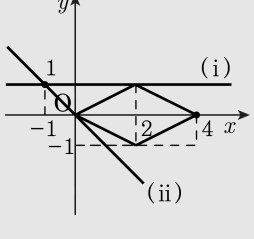
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서

$x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을
 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼
 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

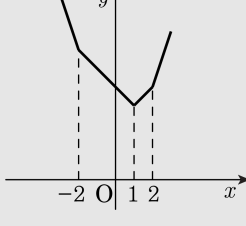
(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

14. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?
- ① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
- ④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P의 좌표를 $P(x)$ 라 하면
 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$
 $y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$ 의
그래프의 개형은
다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최
솟값을 가진다.
따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(1)
이다.



15. 함수 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = 3x^3$ 에 대하여 다음 <보기>에 있는 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 것을 모두 고른 것은 ?

보기

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| I. $f(g(x))$ | II. $g(g(x))$ |
| III. $\{g(x)\}^2$ | IV. $\frac{g(x)}{f(x)}$ |

- ① I, II ② I, IV ③ II, III ④ II, IV ⑤ III, IV

해설

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 에서

I. $F(x) = f(g(x))$ 로 놓으면

$$F(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$$

$$\therefore F(-x) = F(x)$$

II. $F(x) = g(g(x))$ 로 놓으면

$$F(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x))$$

$$\therefore F(-x) = -F(x)$$

III. $F(x) = \{g(x)\}^2$ 로 놓으면

$$F(-x) = \{g(-x)\}^2$$

$$= \{-g(x)\}^2 = \{g(x)\}^2$$

$$\therefore F(-x) = F(x)$$

IV. $F(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 로 놓으면

$$F(-x) = \frac{g(-x)}{f(-x)} = -\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\therefore F(-x) = -F(x)$$

따라서 원점에 대하여 대칭인 함수는 II, IV

16. R 를 실수 전체의 집합, $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ 이라 한다. R 에서 A 로의 함수 f 가 $f(x) = 1 - x^2$, $f(x+2) = f(x)$ 로 정의될 때, $f(5)$ 의 값은?

① 0 ② -3 ③ -8 ④ -24 ⑤ -27

해설

$$f(x+2) = f(x) \text{ 에서 } f(5) = f(3) = f(1)$$

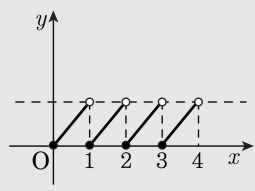
$$f(x) = 1 - x^2 \text{ 에서 } f(1) = 0$$

$$\therefore f(5) = 0$$

17. $y = x - [x] (0 \leq x \leq 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
 ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

- ① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서

i) $0 \leq x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$

ii) $1 \leq x < 2$, $y = x - 1$

iii) $2 \leq x < 3$, $y = x - 2$

iv) $3 \leq x < 4$, $y = x - 3$

i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로

$4\sqrt{2}$ 가 된다.

18. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수 } \}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수 } \}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

19. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

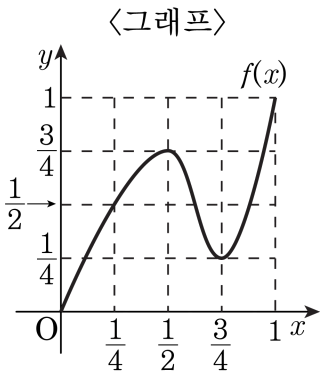
X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면
 $f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면
 $f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ에 의해
 $f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는
원소는 0의 1가지,
1이 대응할 수 있는 원소는
-2, -1, 1, 2의 4가지,
-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

20. $R = \{x|0 \leq x \leq 1\}$ 이라 할 때, R 에서 R 로의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) : f$ 개수 n 개)



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$)

- ① $\frac{99}{2}$
- ② $\frac{95}{2}$
- ③ $\frac{93}{2}$
- ④ $\frac{91}{2}$
- ⑤ $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, ... 이므로

$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$

21. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1, x \geq 1, x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따 라 서, $f(x) = |x^2 - 1| =$

$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$

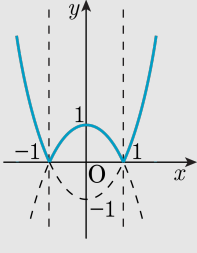
$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.



22. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$g^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x - 1) = -(3x - 1) + 2 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1) \\ &= (g^{-1} \circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1)) = 0 \end{aligned}$$

23. 두 함수 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $h(x) = 2x + 3$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$g(h(x)) = f(x+2)$ 를 만족할 때, 함수 $g(x)$ 를 구하면?

- ① $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ③ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$
- ④ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$
- ⑤ $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

해설

$x+2=t$ 로 치환한 후 x 를 0 을 기준으로 나누었던 범위를 t 에 관하여 다시 나타낸다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x$,

$x < 0$ 일 때, $f(x) = 0$

$g(2x+3) = f(x+2)$ 에서 $2x+3=t$ 로 놓으면

$g(t) = f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) =$

$\begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 일 때} \right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} < 0 \text{ 일 때} \right) \end{cases}$

$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \geq -1) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}$

24. 두 함수 $f(x) = -x + 5$, $g(x) = 4x - 1$ 에 대하여 $(f \circ h \circ g)(x) = 2x - \frac{3}{2}$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = -\frac{1}{2}x + 6$ ② $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
③ $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ④ $h(x) = \frac{1}{2}x + 5$
⑤ $h(x) = \frac{1}{2}x + 8$

해설

$f(x) = -x + 5$ 에서 $f^{-1}(x) = -x + 5$ 이므로

$(f \circ h \circ g)(x) = 2x - \frac{3}{2}$ 에서

$f(h(g(x))) = 2x - \frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= f^{-1}\left(2x - \frac{3}{2}\right) \\ &= -\left(2x - \frac{3}{2}\right) + 5 \\ &= -2x + \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore h(4x - 1) = -2x + \frac{13}{2} \cdots \textcircled{1}$$

①에서 $4x - 1 = t$ 라 하면 $x = \frac{t+1}{4}$ 이므로

$$h(t) = -2\left(\frac{t+1}{4}\right) + \frac{13}{2} = -\frac{1}{2}t + 6 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } h(x) = -\frac{1}{2}x + 6$$

25. 실수 전체집합에서 정의된 함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < 0) \\ 2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $g(-4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= g(x) \\ g(-4) &= f^{-1}(-4) \\ f^{-1}(-4) &= a \text{ 이면 } f(a) = -4 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -a^2 = -4(a < 0) \\ 2a = -4(a \geq 0) \end{cases}$$

따라서 $a = -2$