

1. 자연수  $n$  에 대하여  $2^{4n}$ ,  $3^{3n}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ①  $2^{4n} < 3^{3n}$                       ②  $2^{4n} > 3^{3n}$                       ③  $2^{4n} \leq 3^{3n}$   
④  $2^{4n} \geq 3^{3n}$                       ⑤  $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

2. 부등식  $3^{400} > 4^{100n}$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 개수는?

- ① 1개      ② 2개      ③ 3개      ④ 4개      ⑤ 5개

해설

$$\frac{3^{400}}{4^{100n}} = \frac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\frac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$$

$$3^{400} > 4^{100n} \text{ 이므로 } \frac{81}{4^n} > 1$$

$$\therefore n = 1, 2, 3$$

따라서 자연수  $n$ 의 개수는 3 개이다.

3. 두 수  $2^{30}, 3^{20}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $2^{30} > 3^{20}$

②  $2^{30} \leq 3^{20}$

③  $2^{60} > 3^{20}$

④  $2^{60} \geq 3^{20}$

⑤  $2^{30} < 3^{20}$

해설

$$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1$$

$$\therefore 2^{30} < 3^{20}$$

4. 세 수  $2^{60}$ ,  $3^{40}$ ,  $5^{30}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$

②  $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$

③  $3 < 5^{30} < 2^{60}$

④  $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$

⑤  $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$$

5. 부등식  $|x + y| \leq |x| + |y|$  에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ①  $x = y$                       ②  $xy > 0$                       ③  $xy \geq 0$   
④  $x \geq 0, y \geq 0$               ⑤  $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$  의 양변을 제곱하여 정리하면  
 $xy = |xy|$   
( i )  $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$   
( ii ) 또  $xy > 0$  이면  $x, y$  는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.  
 $xy = 0$  이면 등호가 성립한다.  
따라서,  $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$   
( i ), ( ii ) 에서  
 $xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$

6. 임의의 실수  $a, b, c$  에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ①  $|a| = -a$
- ②  $a > b > 0$  일 때,  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  이다.
- ③  $|a| \geq 0$  ,  $|a| \geq a$  ,  $|a| = |-a|$  이다.
- ④  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ⑤  $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

- ①  $|a| = a(a \geq 0)$   
 $-a(a < 0)$
- ② 참
- ③ 참
- ④  $(|a + b + c|)^2$   
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$   
 $(|a| + |b| + |c|)^2$   
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$   
 $|a||b| \geq ab, |b||c| \geq bc, |c||a| \geq ca$   
 $\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ⑤  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$   
 $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2 (\because |a||b| \geq ab)$   
 $\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

7. 다음은 임의의 실수  $x, y$  에 대하여  $|x| + |y| \geq |x - y|$  가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$$\begin{aligned} & (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2 \\ &= 2(|xy| + xy) \geq 0 \\ &\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2 \\ &\text{그런데 } |x| + |y| \geq 0, |x - y| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|x| + |y| \geq |x - y| \text{ (단, 등호는 ( ㉠ ) 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

①  $xy > 0$

②  $xy < 0$

③  $xy \geq 0$

④  $xy \leq 0$

⑤  $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서  
등호는  $|xy| + xy = 0$  일 때, 성립한다.  
 $|xy| \geq 0$  이므로  
 $|xy| + xy = 0$  이려면  $xy \leq 0$   
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

8. 산술-기하평균을 이용하여  $x + y = 4$  일 때,  $xy$ 의 최댓값을 구하여라.  
(단,  $x > 0$ ,  $y > 0$ )

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x + y = 4$  라면

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\sqrt{xy} \leq 2$ 에서  $xy \leq 4$

$\therefore xy$ 의 최댓값은 4이다.

9.  $a > 0, b > 0$  일 때,  $(2a + b) \left( \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a + b) \left( \frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 16 + 1 + \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 8$$

$$\therefore \text{최솟값은 } 17 + 8 = 25$$

10. 양수  $x, y$ 에 대하여  $\left(x + \frac{3}{y}\right)\left(3y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3xy + 1 + 9 + \frac{3}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{3xy \cdot \frac{3}{xy}} + 10 \\ &= 2 \cdot 3 + 10 = 16\end{aligned}$$

11. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

①  $2\sqrt{2}$       ② 4      ③  $4\sqrt{2}$       ④ 8      ⑤  $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를  $x$ , 높이를  $y$ 라 하면

$$xy = 8 \cdots \text{㉠}$$

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는  $\sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{16} = 4$$

단, 등호는  $x^2 = y^2$  즉  $x = y$ 일 때 성립한다.

$x = y$ 를 ㉠에 대입하면  $x^2 = 8$

따라서  $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

12. 길이가 10인 쇠파이프를  $n$ 등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가  $x$ 인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이  $250x^2$  원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000 원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

- ① 6000 원                      ② 7000 원                      ③ 8000 원  
④ 9000 원                      ⑤ 10000 원

해설

$$\begin{aligned} & \text{쇠파이프 한 개의 길이 : } \frac{10}{n} \\ (\text{총 비용}) &= 250 \left( \frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1) \\ &= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000 \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000 \\ &= 2 \times 5000 - 1000 \\ &= 10000 - 1000 = 9000 \end{aligned}$$

13.  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고  $a + b + c = 14$ 일 때,  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{c}^2)$   
 $\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$   
 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$   
 $\leq 14(a + b + c) = 14^2$   
 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로  
 $\therefore 0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$   
따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

14. 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때  $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ①  $\frac{1}{3}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③ 1      ④ 2      ⑤ 3

해설

$x, y, z$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\}(x^2 + y^2 + z^2)$   
 $\geq (x - y + 4z)^2$   
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$   
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$   
따라서  $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

15. 실수  $a, b, x, y$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중  $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

①  $-1$       ②  $0$       ③  $2$       ④  $3$       ⑤  $4$

해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$   
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$   
따라서 4는  $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

16.  $a, b, c$ 가 실수이고  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때  $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각  $M, m$ 이라 할 때,  $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2\} (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + \sqrt{2}c)^2$$

$$\therefore (a + b + \sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$$

$$\therefore -4 \leq a + b + \sqrt{2}c \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$$\therefore M = 4, m = -4$$

$$M - m = 8$$

17.  $a, b, x, y$ 가 실수이고  $a^2 + b^2 = 2, x^2 + y^2 = 8$ 일 때,  $ax + by$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M + m$ 의 값을 구하면?

①  $-1$       ②  $0$       ③  $1$       ④  $-\frac{1}{2}$       ⑤  $-5$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
즉,  $(ax + by)^2 \leq 2 \times 8$   
한편,  $ax + by = X$ 라 하면,  $X^2 \leq 16$   
 $\therefore -4 \leq X \leq 4$   
따라서,  $M = 4, m = -4$   
 $\therefore M + m = 0$

18. 실수  $x, y$ 에 대하여  $3x + 4y = 5$  일 때,  $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 6                      ⑤ 8

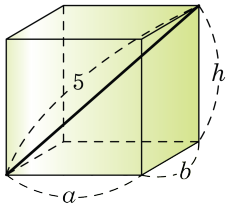
해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해  
 $(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$   
 $25(x^2 + y^2) \geq 25$   
 $\therefore x^2 + y^2 \geq 1$

해설

$3x + 4y = 5$ 에서  
 $y = \frac{1}{4}(5 - 3x)$   
 $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{16}(3x - 5)^2$   
 $= x^2 + \frac{1}{16}(9x^2 - 30x + 25)$   
 $= \frac{25}{16}x^2 - \frac{30}{16}x + \frac{25}{16}$   
 $= \frac{25}{16}\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \frac{25}{16}$   
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$   
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 1$

19. 코시-슈바르츠 부등식  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각  $a, b, h$ 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



- ①  $5\sqrt{3}$       ②  $4\sqrt{5}$       ③  $20\sqrt{3}$   
 ④  $25\sqrt{5}$       ⑤  $24\sqrt{6}$

해설

$a^2 + b^2 + h^2 = 25$   
 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.  
 $(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$   
 $25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$   
 $\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$   
 $\therefore$  모서리의 길이의 합  $4(a + b + h)$ 의 최댓값  
 $: 20\sqrt{3}$

20. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수  $a, b, H$ 에 대하여  
적당한 실수  $r$ 가 존재하여  
 $a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$ 가 성립한다고 하자.  
그러면  $a \neq b$ 이고  $\frac{a-H}{a} = \frac{b-H}{b} \cdots (B)$ 이므로  
 $H = \frac{a+b}{2}$ 이다.  
역으로,  $a \neq b$ 인 양수  $a, b$ 에 대하여  
 $H = \frac{a+b}{2}$ 이면,  
식  $(B)$ 가 성립하고  $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.  
 $(B)$ 에서  $\frac{a-H}{a} = \frac{b-H}{b}$ 이라 놓으면  
식  $(A)$ 가 성립한다. 따라서 양수  $a, b, H$ 에 대하여 적당한 실수  $r$ 이 존재하여  
식  $(A)$ 가 성립하기 위한  $(\Leftarrow)$  조건은  
 $a \neq b$ 이고  $H = \frac{a+b}{2}$ 이다.

위의 증명에서  $(\Leftarrow), (\Rightarrow), (\Leftarrow)$ 에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

- ①  $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요충분}$       ②  $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{필요충분}$   
③  $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{충분}$       ④  $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요}$   
⑤  $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{충분}$

해설

$a = H + \frac{a}{r}$ 에서  $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$   
 $H = b + \frac{b}{r}$ 에서  $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$   
 $\therefore \frac{a-H}{a} = \frac{H-b}{b}$   
 $ab - bH = aH - ab$ 이므로  $H = \frac{a+b}{2}$   
따라서  $(\Leftarrow)$  필요충분조건

21. 다음은  $a > 0, b > 0$  일 때  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  임을 증명한 것이다. (       )

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

- ①  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

②  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③  $a + b$
- ④  $a - b$

⑤  $ab$

해설

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

22.  $a \geq 0, b \geq 0$  일 때,  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$  이므로  
부등식  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.  
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ①  $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

②  $\geq, a - b, a = b = 0$
- ③  $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

④  $>, a - b, a = b$
- ⑤  $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$   
 $= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$   
(가), (나)의 결과에서  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ 이므로  
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$   
(다)  $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$ 에서  
등호가 성립할 때는  $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$  일 때이므로  
등호는  $a = b$  일 때 성립한다.

23. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은  $x$ 분씩 늘어나며  $y$ 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한  $xy$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은  $10x$ ,  
 $y$ 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은  $2y$ 분이다.  
시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

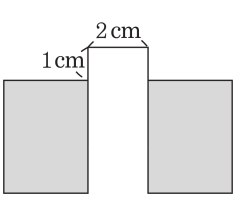
$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

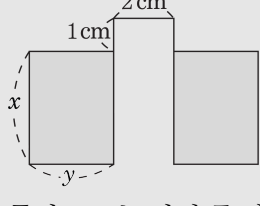
따라서  $xy$ 의 최댓값은 45이다.

24. 폭이 200cm인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 단면이 아래 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면의 최대 넓이에 가장 가까운 값은?



- ① 1000 cm<sup>2</sup>
- ② 1200 cm<sup>2</sup>
- ③ 1600 cm<sup>2</sup>
- ④ 2000 cm<sup>2</sup>
- ⑤ 2400 cm<sup>2</sup>

해설



물이 흐르는 단면 중 한 쪽 직사각형의 가로를  $y$  cm, 세로를  $x$  cm라고 하면

$4x + 2y + 2 + 1 \times 2 = 200$ 에서

$4x + 2y = 196$   $x > 0, y > 0$ 이므로

(산술평균)  $\geq$  (기하평균)에서

$\frac{4x + 2y}{2} \geq \sqrt{4x \cdot 2y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$

$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{196}{2}$

$\therefore xy \leq \frac{49^2}{2}, 2xy \leq 49^2, 2xy \leq 2401$

따라서 단면의 최대 넓이는  $2xy = 2401$

25. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)를 지나는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때,  $\triangle OBC$ 의 최소 넓이는?

- ① 3                      ② 3.5                      ③ 4                      ④ 4.5                      ⑤ 5

해설

B( $a, 0$ ), C( $0, b$ )이므로  
 $\triangle OBC$ 의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 은 점 (1, 2)를 지나므로

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{\frac{1}{S}}$$

$$\therefore S \geq 4$$

26. 이차방정식  $x^2 - 4x + 4a = 0$  ( $a$ 는 실수) 이 허근을 가질 때,  $a - 1 + \frac{9}{a - 1}$ 의 최솟값은?

- ① 2                      ② 3                      ③ 4                      ④ 5                      ⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 허근을 가지므로

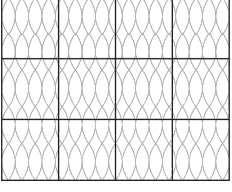
$$\frac{D}{4} = 4 - 4a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

$$\therefore (a - 1) + \frac{9}{(a - 1)} \geq 2\sqrt{(a - 1) \cdot \frac{9}{(a - 1)}} = 6$$

따라서 최솟값은 6

27. 어떤 농부가 길이 120 m인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



- ① 120 m<sup>2</sup>
- ② 180 m<sup>2</sup>
- ③ 240 m<sup>2</sup>
- ④ 300 m<sup>2</sup>
- ⑤ 360 m<sup>2</sup>

해설

전체의 가로를  $x$ , 세로를  $y$  라 하면  
 $4x + 5y = 120$   
넓이 :  $xy$   
 $4x + 5y = 120 \geq 2\sqrt{4x \cdot 5y}$   
 $60 \geq \sqrt{20xy}, 3600 \geq 20xy$   
 $\therefore 180 \geq xy$   
따라서 넓이의 최대값은 180

해설

$xy = x \times \frac{1}{5}(120 - 4x)$   
 $= -\frac{4}{5}x^2 + 24x$   
 $= -\frac{4}{5}(x^2 - 30x + 225 - 225)$   
 $= -\frac{4}{5}(x - 15)^2 + 180$   
 $x = 15(\text{m}), y = 12(\text{m})$  일 때,  
최대넓이는 180 m<sup>2</sup>

28.  $a > 1$ 일 때,  $\frac{1}{a-1} + 4a - 3$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

29. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \end{aligned}$$

- ①

$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$
- ②

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$
- ③

$\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c|$
- ④

$a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2$
- ⑤

$a + b + c \geq 3^3 \sqrt{abc}$

해설

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0 \text{ 이므로} \\ &a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \\ &\text{③의 경우 양변을 제곱하여 빼면} \\ &3(a^2 + b^2 + c^2) - |a + b + c|^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \\ &\therefore \sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq |a + b + c| \end{aligned}$$

30. 실수  $x, y$  에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠  $x > y$  이면,  $x^2 > y^2$  이다.

㉡  $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢  $x > y$  이면  $x^3 > y^3$  이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠. (반례)  $x = 2, y = -3$  일 때,  $4 < 9 \quad \therefore$  거짓
- ㉡.  $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$   
 $\therefore x^2 + y^2 \geq xy$   
 $\therefore$  참
- ㉢.  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$   
 $x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$   
 $\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$   
 $\therefore$  참

31. 모든 실수  $x, y$  에 대하여  $x^2 + 2axy + by^2 = 0$  이 항상 성립하기 위한 실수  $a, b$  의 조건은?

①  $a \leq b^2$

②  $b^2 \leq a$

③  $a^2 \leq b$

④  $b \leq a^2$

⑤  $a^2 = b$

해설

모든 실수  $x$  에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$  이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든  $y$  에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

32. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단,  $a, b, x, y$ 는 실수임)

- ①  $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- ②  $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- ③  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (단,  $ax = by$ 일 때, 등호 성립)
- ④  $a^2 + b^2 \geq ab$ (단,  $a = b$ 일 때, 등호 성립)
- ⑤ 두 양수  $a, b$ 에 대하여  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (단,  $a = b$ 일 때, 등호 성립)

해설

- ②의 반례 :  $a, b$ 가 음수인 경우
- ③  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$   
 $= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$   
 $- (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$   
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$   
 $= (ay - bx)^2 \geq 0$  단, 등호는  $ay = bx$ 일때 성립
- ④  $a^2 + b^2 - ab$   
 $= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$   
등호는  $a = b = 0$ 일때 성립
- ⑤  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$   
( $\therefore$  산술평균  $\geq$  기하평균  $\geq$  조화평균)

33. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단,  $a, b, c$  는 실수)

보기

- ㉠  $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$  이면  $a < c$
- ㉡  $a > b$  이면  $ac > bc$
- ㉢  $a < b < 0$  이면  $a^2 > ab$
- ㉣  $|a| + |b| > |a + b|$
- ㉤  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣, ㉠

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

- ㉠  $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$   
 $\Rightarrow$  양변에  $b^2$  을 곱하면  
 $a < c$  ( $\because b^2 > 0$ )
- ㉡  $a > b$  이면  $ac > bc$   
반례 :  $c \leq 0$  인 경우 : 틀림
- ㉢  $a^2 - ab = a(a - b) > 0$
- ㉣  $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$   
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0$   
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$  : 틀림
- ㉤  $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$   
 $= \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} \geq 0$   
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

34. 실수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2 \geq -ab$ 임을 증명한 것이다.  $[가]$ ,  $[나]$ 에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서  $A - B \geq 0$ 이므로  $A \geq B$ 이다. 즉,  $a^2 + b^2 \geq -ab$  (단 등호는  $a = b = c$ 일 때 성립)

- ①  $>, \geq$
- ②  $\geq, \geq$
- ③  $>, >$
- ④  $<, \geq$
- ⑤  $\leq, \leq$

해설

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

( $a, b$ 가 실수이므로)  
 $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

따라서  $A - B \geq 0$ 이므로  $A \geq B$ 이다.  
즉,  $a^2 + b^2 \geq -ab$  (단 등호는  $a = b = c$ 일 때 성립)

35.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,  $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

36. 세 양수  $x, y, z$ 가  $x + y + z = 1$ 을 만족할 때,  
 $\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(2 + \frac{1}{y}\right)\left(2 + \frac{1}{z}\right)$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 125

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz} \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{xyz} \text{ 이므로} \\ (\text{준식}) &= 8 + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{3}{xyz} \\ x+y+z &= 1 \text{ 이므로} \\ \frac{1}{3} &= \frac{x+y+z}{3} \geq 3\sqrt{xyz} \\ \left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3} \text{ 일 때 성립}\right) \\ \therefore xyz &\leq \frac{1}{27} \quad \therefore \frac{1}{xyz} \geq 27 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 9 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 (준식)} &\geq 8 + 36 + 81 = 125\end{aligned}$$

37.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때,  $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$  의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

38. 세 양수  $a, b, c$ 가  $abc = 1$  을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

- I.  $a + b + c \geq 3$   
II.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$   
III.  $ab + bc + ca \geq 3$   
IV.  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$

- ① I, II                      ② I, III                      ③ III, IV  
④ I, III, IV                ⑤ I, II, III, IV

해설

$abc = 1$  이므로  
I.  $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$   
II.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$   
III.  $ab + bc + ca \geq 3 \sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$   
IV.  $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$   
 $= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$   
 $\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

39. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을  $a, b, c, d, e$ 라고 할 때,  $a + 3b + 5c + 7d + 9e$ 의 최솟값은?

- ① 83      ② 85      ③ 87      ④ 89      ⑤ 91

해설

$a + 3b + 5c + 7d + 9e$   
 $= (10 - 9)a + (10 - 7)b + (10 - 5)c + (10 - 3)d + (10 - 1)e$   
 $= 10(a + b + c + d + e) - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$   
 $= 10 \times 25 - (9a + 7b + 5c + 3d + e)$   
여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여  
 $(9^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq (9a + 7b + 5c + 3d + e)^2$   
 $(9a + 7b + 5c + 3d + e) \leq (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2)$  이고  
등호는  $\frac{a}{9} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = \frac{d}{3} = \frac{e}{1}$  일 때, 성립한다.  
 $\therefore a + 3b + 5c + 7d + 9e \geq 10 \times 25 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2) = 250 - (165) = 85$   
따라서,  $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$  일 때,  
준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

$a, b, c, d, e$ 가 자연수이므로  
 $a = 9, b = 7, c = 5, d = 3, e = 1$  일 때  
준식은 최소가 된다.

40.  $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$ 을 만족하는 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x$ 가 취할 수 있는 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$ 에서  $y+z=4-x\cdots\textcircled{1}$   
 $x^2+y^2+z^2=6$ 에서  $y^2+z^2=6-x^2\cdots\textcircled{2}$   
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$   
(단, 등호는  $y=z$  일 때 성립)  
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면  
 $2(6-x^2)\geq(4-x)^2, 3x^2-8x+4\leq 0$   
 $(3x-2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3}\leq x\leq 2$   
따라서  $M=2, m=\frac{2}{3}$  이므로  $\frac{M}{m}=3$