

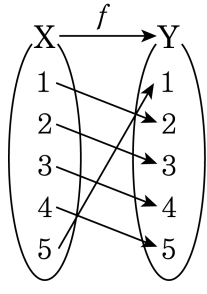
1. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

2. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$
 $\therefore a = 1$

3. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$
 $= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$
그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로
 $a = -2, b = 2$
 $\therefore ab = -4$

4. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

6. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f : R \rightarrow R$ 를 $f(x) = \begin{cases} \pi & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 으로 정의할 때, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은?
- ① $\{0\}$ ② $\{\pi\}$
- ③ $\{0, \pi\}$ ④ 유리수 전체의 집합
- ⑤ 실수 전체의 집합

해설

i) x 가 유리수이면 $f(x) = \pi$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\pi) = 0$
 ii) x 가 무리수이면 $f(x) = 0$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = \pi$
 따라서, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은 $\{0, \pi\}$ 이다.

7. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3

② $\frac{8}{3}$

③ 6

④ $\frac{13}{2}$

⑤ 7

해설

$$\frac{x+1}{x-2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x+1 = tx-2t, (t-1)x = 2t+1$$

$$\therefore x = \frac{2t+1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{3 \times \frac{2t+1}{t-1} + 4}{\frac{2t+1}{t-1} + 1} = \frac{10t-1}{3t}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

8. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x + k$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -5

② -6

③ -7

④ -8

⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f \circ g = g \circ f \text{에서 } -2x + 2k + 3 &= -2x - 3 + k \\ \therefore k &= -6 \end{aligned}$$

9. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{7}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x-1, h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

10. 두 함수 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = -2x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서
 $-6x + 3k + 2 = -6x - 4 + k$
 $2k = -6$ 에서 $k = -3$

11. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
 $(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$
 $x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
 $x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 에 대하여 $f^{101}(-1)$ 의 값은? (단, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$)

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f^2(-1) = 2, \quad f^3(-1) = -1, \quad f^4(-1) = \frac{1}{2} \quad \dots$$

주기가 3 으로 반복되므로

$$f^{101} = (f^3)^{33} \circ f^2 = f^2 = 2$$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

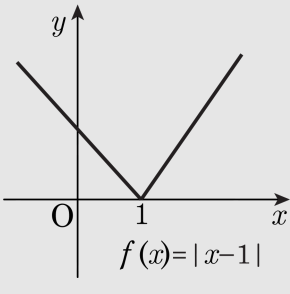
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \text{모든 실수 } x \text{ 에 대하여 } \textcircled{1} &= \textcircled{2} \text{ 이므로} \\ 2a &= 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1 \\ \text{위의 식을 연립하여 풀면 } a &= 1, \quad b = 0 (\because a \neq 0) \\ \text{즉, } f(x) &= x \text{ 이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \end{aligned}$$

14. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x 의 합을 구하면?

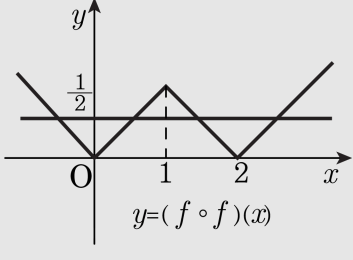
- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



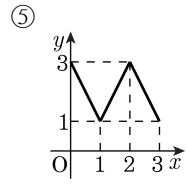
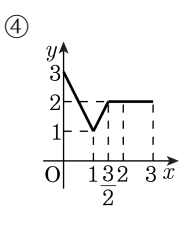
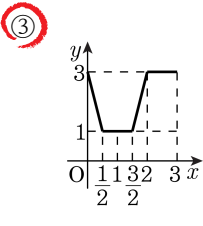
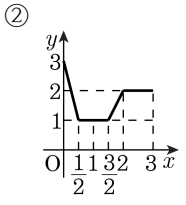
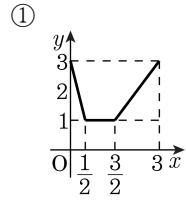
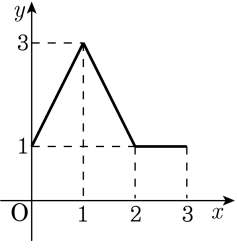
$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 $y = \frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표이다.

$(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$

15. 함수

$y = f(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y = (f \circ f)(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프는 무엇인가?



해설

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프도 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.
 $y = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 에서
 $f(f(0)) = f(1) = 3$
 $f(f(1)) = f(3) = 1$
 $f(f(2)) = f(1) = 3$
 $f(f(3)) = f(1) = 3$
따라서, $y = (f \circ f)(x)$ 를 그래프로 나타내면 ③과 같다.