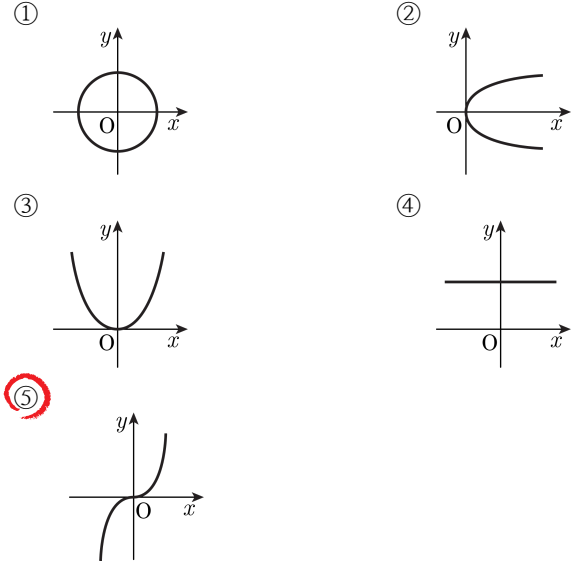


1. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

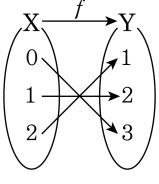


해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

2. 다음 그림의 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$$f(2) = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1 \\ \therefore f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$$

3. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

4. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$

$x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

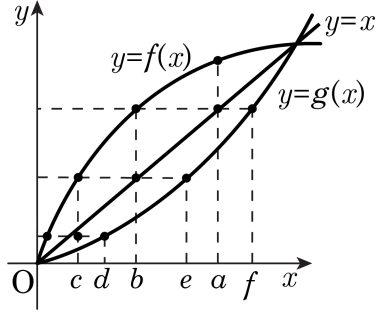
$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

5. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. 이때, $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \dots \ominus$ 이고
 $f^{-1}(a) = k$ 라 하면 $f(k) = a$ 에서 $k = b$
 $\therefore f^{-1}(a) = b \dots \dots \ominus$
 $f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 에서 $l = c$
 $\therefore f^{-1}(b) = c \dots \dots \ominus$
 $g^{-1}(c) = m$ 이라 하면 $g(m) = c$ 에서 $m = d$
 $\therefore g^{-1}(c) = d \dots \dots \omin�$
 $\omin�, \omin�, \omin�, \omin�$ 에서
 $(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$
 $= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$
 $= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

6. 함수 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ ($x \geq 1$)

② $y = x^2 - 2x$ ($x \leq 1$)

③ $y = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ ($x \leq 1$)

해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} \quad (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 1) \text{의 치역}$$

$\{y | y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

7. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 이 함수 $f(x)$ 와 같을 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

- ① $a = 1, b = 0$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = 0$
④ $a = 2, b = 1$ ⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ 에서 } f(f(x)) = x$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b \end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = x$$

$$\therefore a^2 = 1, ab + b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

8. 함수 $f(x) = mx + n$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 7$ 에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$

$2m + n = 3 \cdots \textcircled{1}$

$3m + n = 7 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$

$\therefore m + n = -1$

9. 함수 $f(x) = ax + 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때, $f^{-1} \circ f = I$ (I 는 항등함수) 이므로 $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(ax + 3) \\ &= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x \end{aligned}$$

따라서 $a^2 = 1$, $3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$

10. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f(5) = -2$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f^{-1}(5)$ 의 값은?

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

11. 실수 전체의 집합에서 $f : x \rightarrow ax(a \neq 1), g : x \rightarrow x + b$ 로 정의된 함수 f, g 에 대하여 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 가 성립할 때, ab 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ax + ab$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - b \cdots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x, \quad g^{-1}(x) = x - b$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{a}(x - b)$$

$$= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } b = \frac{b}{a}(a \neq 1) \text{ 이므로 } b = 0$$

$$\therefore ab = 0$$

12. 1 보다 큰 실수 전체의 집합 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,
 $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f) = g^{-1} \circ f$$

$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) = k \text{ 라고 하자.}$$

$$\Rightarrow g(k) = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2k-1} = 2$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

13. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -3x - 4$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g) &= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ g) \\ &= (f^{-1} \circ g) \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3) &= (f^{-1} \circ g)(-3) \\ &= f^{-1}(g(-3)) \\ &= f^{-1}(5)\end{aligned}$$

이때, $f^{-1}(5) = k$ 라 하면 $f(k) = 5$

따라서 $2k + 3 = 5$ 에서 $k = 1$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3) = 1$$

14. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재

재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

15. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점 $(2, 2), (3, 3)$ 이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$