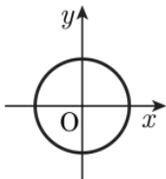
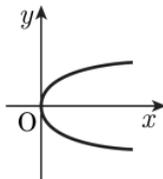


1. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

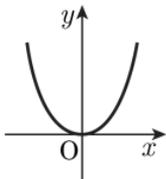
①



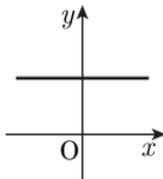
②



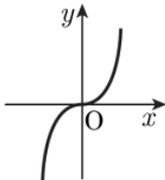
③



④



⑤



해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

2. 다음 그림의 함수  $f$  에 대하여  $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$  의 값을 구하면?

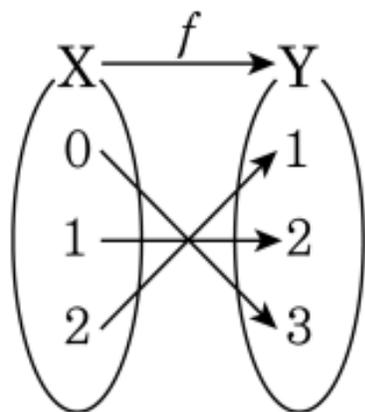
① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5



해설

$$f(2) = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1$$

$$\therefore f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$$

3. 함수  $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여  $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수  $a$ 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

4. 함수  $f(x) = 2x - 5$  의 역함수를  $y = f^{-1}(x)$  라 할 때,  $f^{-1}(-3)$  의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$  에서  $x$  와  $y$  를 바꾸면  $x = 2y - 5$   
 $x = 2y - 5$  를  $y$  에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

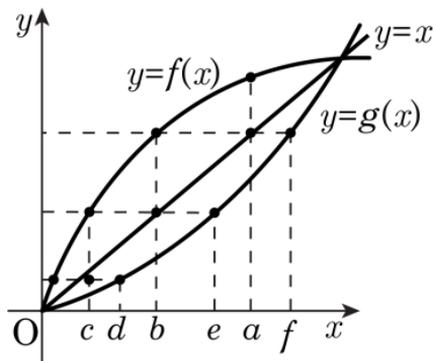
$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이|  $f^{-1}(-3) = a$  로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

5. 다음 그림은 세 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = x$ 의 그래프이다. 이때,  $(f \circ f \circ g)^{-1}(a)$ 의 값은?



①  $a$

②  $b$

③  $c$

④  $d$

⑤  $e$

### 해설

$(f \circ f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \dots \textcircled{\Gamma}$  이고

$f^{-1}(a) = k$ 라 하면  $f(k) = a$ 에서  $k = b$

$\therefore f^{-1}(a) = b \dots \textcircled{\text{L}}$

$f^{-1}(b) = l$ 이라 하면  $f(l) = b$ 에서  $l = c$

$\therefore f^{-1}(b) = c \dots \textcircled{\text{E}}$

$g^{-1}(c) = m$ 이라 하면  $g(m) = c$ 에서  $m = d$

$\therefore g^{-1}(c) = d \dots \textcircled{\text{E}}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}, \textcircled{\text{E}}, \textcircled{\text{E}}$ 에서

$(f \circ f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a)$

$= g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]$

$= g^{-1}\{f^{-1}(b)\} = g^{-1}(c) = d$

6. 함수  $y = x^2 - 2x$  ( $x \geq 1$ ) 의 역함수를 구하면?

①  $y = x^2 + 2x$  ( $x \geq 1$ )

②  $y = x^2 - 2x$  ( $x \leq 1$ )

③  $y = \sqrt{x+1}$  ( $x \geq -1$ )

④  $y = \sqrt{x+1} + 1$  ( $x \geq -1$ )

⑤  $y = \sqrt{-x+1} + 1$  ( $x \leq 1$ )

### 해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \text{ ( $x \geq 1$ ) 의 치역}$$

$\{y | y \geq -1\}$  이

역함수  $y = \sqrt{x+1} + 1$  의 정의역이 되므로

구하는 역함수는  $y = \sqrt{x+1} + 1$  ( $x \geq -1$ )

7. 함수  $f(x) = ax + b(a > 0)$  의 역함수  $f^{-1}(x)$  가 이 함수  $f(x)$  와 같을 때, 상수  $a, b$  의 값을 구하면?

- ①  $a = 1, b = 0$       ②  $a = 1, b = 1$       ③  $a = 2, b = 0$   
④  $a = 2, b = 1$       ⑤  $a = 3, b = 0$

해설

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ 에서 } f(f(x)) = x$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b \end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = x$$

$$\therefore a^2 = 1, ab + b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

8. 함수  $f(x) = mx + n$ 에 대하여  $f^{-1}(3) = 2$ ,  $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수  $m, n$ 의 합  $m + n$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3, (f \circ f)(2) = 7$ 에서  $f(f(2)) = f(3) = 7$

$2m + n = 3 \cdots \text{㉠}$

$3m + n = 7 \cdots \text{㉡}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면  $m = 4, n = -5$

$\therefore m + n = -1$

9. 함수  $f(x) = ax + 3$  에 대하여  $f^{-1} = f$  가 성립할 때, 상수  $a$  의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$  의 양변에 함수  $f$  를 합성하면

$$f^{-1} \circ f = f \circ f$$

이때,  $f^{-1} \circ f = I$  ( $I$ 는 항등함수) 이므로  $f \circ f = I$

$$\text{즉 } (f \circ f)(x) = x$$

$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3)$$

$$= a(ax + 3) + 3 = a^2x + 3a + 3 = x$$

따라서  $a^2 = 1$ ,  $3a + 3 = 0$  이므로  $a = -1$

10. 함수  $f(x)$  의 역함수  $f^{-1}(x)$  가 존재하고  $f(5) = -2$ ,  $(f \circ f)(x) = x$  일 때,  $f^{-1}(5)$  의 값은?

① -5

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$  에서  $f = f^{-1}$

따라서  $f^{-1}(5) = f(5) = -2$

11. 실수 전체의 집합에서  $f : x \rightarrow ax(a \neq 1)$ ,  $g : x \rightarrow x + b$  로 정의된 함수  $f, g$  에 대하여  $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  가 성립할 때,  $ab$  의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ax + ab$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - b \cdots \textcircled{\ominus}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x, \quad g^{-1}(x) = x - b$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{a}(x - b)$$

$$= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{\omin�}$$

$$\textcircled{\ominus}, \textcircled{\omin�} \text{에서 } b = \frac{b}{a}(a \neq 1) \text{ 이므로 } b = 0$$

$$\therefore ab = 0$$

12. 1 보다 큰 실수 전체의 집합  $A$  에서  $A$  로의 함수  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  
 $g(x) = \sqrt{2x-1}$ 에 대하여  $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$  의 값을 구하면?

①  $\frac{3}{2}$

②  $\frac{7}{2}$

③  $\frac{9}{2}$

④  $\frac{5}{2}$

⑤  $\frac{11}{2}$

해설

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f) = g^{-1} \circ f$$
$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(2) = k \text{ 라고 하자.}$$

$$\Rightarrow g(k) = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2k-1} = 2$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

13. 두 함수  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = -3x - 4$  에 대하여  $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3)$  의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g) &= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ g) \\ &= (f^{-1} \circ g) \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3) &= (f^{-1} \circ g)(-3) \\ &= f^{-1}(g(-3)) \\ &= f^{-1}(5)\end{aligned}$$

이때,  $f^{-1}(5) = k$  라 하면  $f(k) = 5$

따라서  $2k + 3 = 5$  에서  $k = 1$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-3) = 1$$

14. 함수  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$  에 대하여  $f(x)$  의 역함수가 존재할 때,  $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$  일 때,  $x$  의 값을 구하면? (단,  $f^{-1}(x)$  은  $f(x)$  의 역함수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

15. 함수  $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$  의 역함수를  $g(x)$  라고 할 때,  $y = f(x)$  와  $y = g(x)$  의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1

②  $-\sqrt{2}$

③ 1

④  $\sqrt{2}$

⑤ 2

### 해설

함수  $y = f(x)$  와  $y = g(x)$  의 그래프는 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은  $y = f(x)$  의 그래프와 직선  $y = x$  의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$  과  $y = x$  를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$  이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$