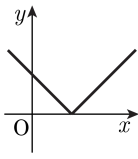
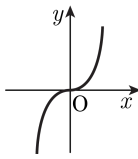


1. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?

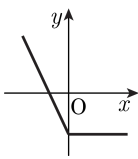
①



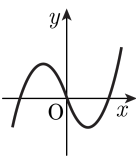
②



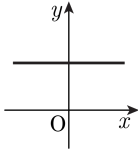
③



④



⑤



해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

2. 함수 $y = -x - 1$ 의 역함수의 그래프에서 x 절편을 a , y 절편을 b 라 할 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = -x - 1$ 에서 $x = -y - 1$

여기서 x 와 y 를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$

따라서 x 절편 $a = -1$, y 절편 $b = -1$ 이므로

$ab = 1$

3. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$

$x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

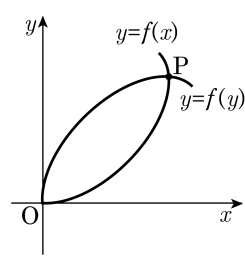
|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

4. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?

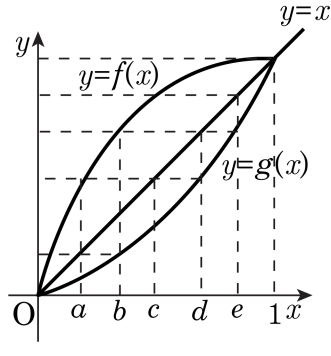
- ① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
 ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 2)$
 ⑤ $(2, 3)$



해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의 교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다. 따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로 $(2, 2)$ 이다.

5. 집합 $A = \{x|0 \leq x \leq 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$ 의 값은 얼마인가?



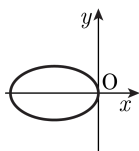
- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

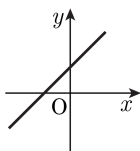
$y = x$ 를 이용하여 함숫값을 구한다.
 $f^{-1}(d) = x$ 라 하면,
 $f(x) = d \quad \therefore x = b$
 $\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$
 $= (f \circ g)(f^{-1}(d))$
 $= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

6. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

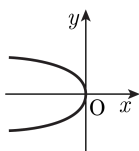
①



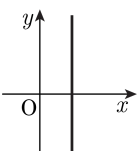
②



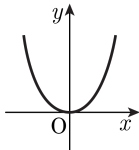
③



④



⑤



해설

역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. $\Rightarrow$ ②

7. 함수 $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$) 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ ($x \geq 1$)

② $y = x^2 - 2x$ ($x \leq 1$)

③ $y = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$)

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ ($x \leq 1$)

해설

$$y = x^2 - 2x \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = y + 1$$

$$(x-1)^2 = y+1, x-1 = \sqrt{y+1} \quad (\because x \geq 1)$$

$$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸어 쓰면 } y = \sqrt{x+1} + 1$$

이 때, 원래의 함수

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 1) \text{의 치역}$$

$\{y | y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ ($x \geq -1$)

8. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?
- ① $n(X) = n(Y)$ 이다.
 - ② $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
 - ③ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
 - ④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.
 - ⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

9. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4

② 3

③ 2

④ -1

⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = I$

$(f \circ f)(x) = x$ 에서

$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$

$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

10. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

11. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$,
 $Y = \{y \mid 2 \leq y \leq 9\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = ax^2 + b$ 로
정의한다. 이 때 $f^{-1}(x)$ 가 존재하도록 상수 a, b 를 정할 때, $a + b$ 의
값은? (단, $a < 0$)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

역함수가 존재하기 위해서는 일대일 대응이어야한다.

$a < 0$ 이므로 $f(x) = ax^2 + b$ 는 x 가 증가할 때

$f(x)$ 는 감소하고 $f(1) = 9, f(2) = 2$ 이다.

$$\begin{cases} a + b = 9 & \cdots \textcircled{1} \\ 4a + b = 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②을 연립하면

$$a = -\frac{7}{3}, b = \frac{34}{3}$$

$$\therefore a + b = 9$$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = |x-2| + ax - 6$ 이 역함수를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 0$

③ $0 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a < -1$ 또는 $a > 1$

해설

$$f(x) = |x-2| + ax - 6$$

$$= \begin{cases} (a+1)x - 8 & (x \geq 2) \\ (a-1)x - 4 & (x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로 역함수가 존재하기 위해서는 $f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

따라서, 기울기 $a+1$ 와 $a-1$ 은 모두 양이거나 모두 음이어야 한다.

$$\text{즉, } (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

13. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x + 2$ 일 때, $(f^{-1} \circ g)(3) + (g^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$(f^{-1} \circ g)(3) + (g^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(5) + g^{-1}(5)$$

$$f^{-1}(5) = k \text{ 이면 } f(k) = 5, g^{-1}(5) = X \text{ 이면 } g(X) = 5$$

$$\Rightarrow k = 1, X = 3$$

$$\Rightarrow (\text{준식}) = 1 + 3 = 4$$

14. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$

15. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재

재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$