

1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

- ① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
- ② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
- ③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
- ④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (중근)
- ⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

-1	2	-1	-6	-1	2
	-2	3	3	-2	
	2	-3	-3	2	0
2		4	2	-2	
	2	1	-1	0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은
 $(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$
 $(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$
 $\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$

2. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$x^3 + 3^3 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{합} : -3 + \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$ 의 모든 근의 합을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1, 1, 2$$

$$\therefore -1+1+2=2$$

4. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

- ① (2,3)

② (-2,3)

③

(3,2)
- ④ (3,-2)

⑤ (-3,-2)

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\ 2x + 3y = 12 & \cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{cases}$$

㉢ - ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

∴ $y = 2$ 를 ㉣대입하면 $x = 3$

∴ $x = 3, y = 2$

5. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

6. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2$, $y = -3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$x = 2$, $y = -3$ 을

두 방정식

$2x + ay = 10$, $x - y = b$ 에 대입하면

모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$

$\therefore a = -2$

$2 - (-3) = b$

$\therefore b = 5$

$\therefore a + b = 3$

7. 방정식 $x^6 - 1 = 0$ 의 해가 아닌 것은?

① -1

② 1

③ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^6 - 1 &= (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \Rightarrow x &= -1, 1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

8. $x(x-1)(x+1)-6=0$ 의 세근을 구하면?

- ① 2, -1, -3 ② -2, 1, -3 ③ 2, 1, -3
- ④ -2, -1±√2i ⑤ 2, -1±√2i

해설

$$\text{준식} = x(x^2-1)-6 = x^3-x-6 = 0$$

2	1	0	-1	-6
		2	4	6
	1	2	3	0

$$(x-2)(x^2+2x+3) = 0$$
$$\therefore x = 2, -1 \pm \sqrt{2}i$$

9. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 - x - 3 &= 0, \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \\x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= 0\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

제 1 식에서 $(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0$
 $\therefore x = 1, -1, -3$
제 2 식에서 $(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 1, -1, -2$
제 3 식에서 $(x - 1)^2(x - 2) = 0$
 $\therefore 1, 2$
 $\therefore$ 공통근 : $x = 1$

10. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$\therefore x = -1, 0, 1$$

11. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

- ① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
 $\{x(x+1)\}\{x(x-1)(x+2)\}-8=0$
 $(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
 $x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
 $\therefore t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든
해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

12. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$x^3 - 13x + 12 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

1		1	0	-13	12
			1	1	-12
		1	1	-12	0

$f(x) = x^3 - 13x + 12$ 라고 하면 $f(1) = 0$ 이므로
 $(x - 1)(x^2 + x - 12) = 0$
 $(x - 1)(x + 4)(x - 3) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$
 $\therefore -4 + 1 + 3 = 0$

13. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 의 모든 실근의 합은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3) = 24$ 를 전개하면
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 30 = 0$
 $x = 5$ 를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

5		1	-6	11	-30
			5	-5	30
		1	-1	6	0

$(x-5)(x^2-x+6) = 0$
 $\therefore x = 5$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{2}$
따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

14. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1 \text{ 또는 } 2$$

15. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

16. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

17. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $-3, 1 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$ 이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + (-3)(1 - \sqrt{2}) + (-3)(1 + \sqrt{2}) = -7$$

$$b = -(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})(-3) = -3$$

$$\therefore a + b = -10$$

18. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

19. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록

하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

20. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

21. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2+y^2=5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=y+1$ 을 ②에 대입하면,

$$(y+1)^2+y^2=5$$

$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=1$$

$$y=-2 \text{ 를 } \textcircled{A} \text{ 에 대입하면 } x=-1$$

$$y=1 \text{ 을 } \textcircled{B} \text{ 에 대입하면 } x=2$$

$$\therefore xy=2$$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$

값이 될 수 없는 것은?

- ① $3\sqrt{2}$
- ② 4
- ③ $-3\sqrt{2}$
- ④ -4
- ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
 $(x - y)(x - 2y)$
 $\Rightarrow (x - y)(x - 2y) = 0$
 $\Rightarrow x = y$ 또는 $x = 2y$
i) $x = y$
 $x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$
 $x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$
ii) $x = 2y$
 $x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$
 $y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$
 $x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

24. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

25. 가로 길이가 세로 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로 길이와 세로 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로 길이를 각각 $x\text{cm}$, $y\text{cm}$ 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
 $2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y + 5 + y = 17, 2y = 12$
 $\therefore y = 6$
 $y = 6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = 11$
 $\therefore xy = 11 \times 6 = 66$

26. x, y 가 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 를

만족시킬 때, $(x + y)^2$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(x - y)^2 = 4$ 에서

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4 & \dots \textcircled{A} \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{A} : 6xy = 6,$$

$$\therefore xy = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + y)^2 &= (x - y)^2 + 4xy \\ &= 4 + 4 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x = y + 2$ 를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$(y + 2)^2 + 4y(y + 2) + y^2 = 10$$

$$6y^2 + 12y - 6 = 0, y^2 + 2y - 1 = 0$$

근의 공식을 이용하면,

$$\therefore y = -1 \pm \sqrt{2}, x = 1 \pm \sqrt{2}(\text{복호동순})$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + y)^2 &= ((1 \pm \sqrt{2}) + (-1 \pm \sqrt{2}))^2 \\ &= (\pm 2\sqrt{2})^2 = 8 \end{aligned}$$

27. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$

② $x = 2, y = 1$

③ $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

④ $x = -2, y = -1$

⑤ $x = 2, y = -1$

해설

$$x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = -y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm \sqrt{3}, \quad x = \mp \sqrt{3}$$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$$

$$\therefore \text{해는 } \begin{cases} x = \pm \sqrt{3} \\ y = \mp \sqrt{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{복호동순})$$

28. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x + 2y) = 0$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x = -2y$ 일 때

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5, y = \pm \sqrt{5}, x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)

$\therefore$ 구하는 해는 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}), (-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}),$

$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

29. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$ 를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z 의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 4개

④ 8개

⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$ 를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$

(i) $z = 1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$$xy = 1, x = y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$$

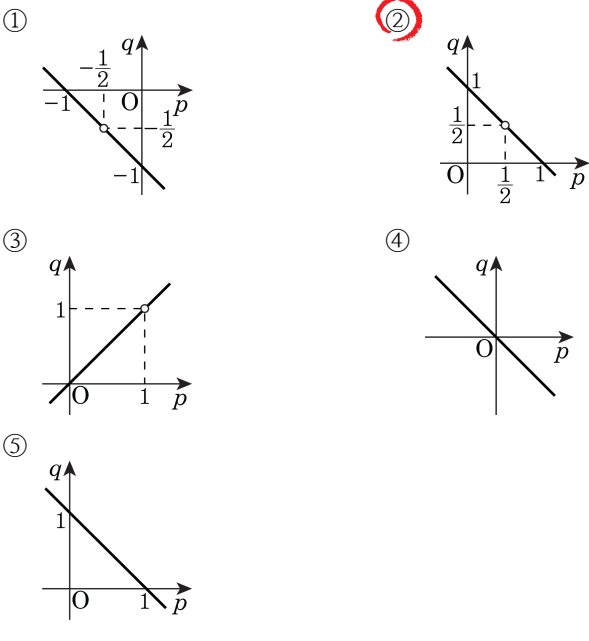
(ii) $z = -1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면

$$xy = -1, x = -y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z) 는 모두 4개이다.

30. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 - px - q = 0$, $x^2 - qx - p = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p , q 의 관계를 나타낸 그래프는?



해설

$$\begin{cases} x^2 - px - q = 0 & \dots ① \\ x^2 - qx - p = 0 & \dots ② \end{cases}$$

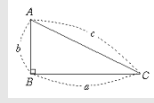
①-②에서 $(-p+q)x - (-p+q) = 0$
 $\therefore (-p+q)(x-1) = 0$
여기서 $-p+q=0$ 이면 즉 $q=p$ 이면
①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.
 $\therefore x=1$ 이다.
이 때 ①에서 $1-p-q=0$
따라서 구하는 식은 $q=-p+1$ (단, $p \neq q$)

31. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설



$$\frac{1}{2}ab = 30, ab = 60$$

$$a + b + c = 30, a + b = 30 - c$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (a + b)^2 - 2ab = c^2$$

$$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$$

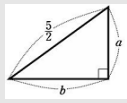
$$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$$

$$60c = 780, \therefore c = 13$$

32. 빗변의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 직각 삼각형의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은?

- ① $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{31}}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하면 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \dots \textcircled{2}$$

①, ②식에서

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$= \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4}$$

$$\therefore a + b = \frac{7}{2}$$

33. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

34. 0이 아닌 실수 x, y 가 $(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 을 만족할 때, x 에 관한 이 방정식은 실수 a 에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. ($a \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$ 에서
 $x^2y^2 + 4a^2x^2 + y^2 + 4a^2 - 8axy = 0$
 $(x^2y^2 - 4axy + 4a^2) + (y^2 - 4axy + 4a^2x^2) = 0$
 $(xy - 2a)^2 + (y - 2ax)^2 = 0$
 $xy - 2a, y - 2ax$ 는 실수이므로
 $xy - 2a = 0, y - 2ax = 0$
 $\therefore xy = 2a, y = 2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2 = 2a$
($a \neq 0$) 이므로 $x^2 = 1, x = \pm 1$

35. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

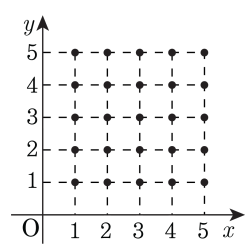
$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

36. 다음 그림의 격자점 중 $xy + x - 2y - 2 = 3$ 을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개
④ 3 개 ⑤ 4 개



해설

$xy + x - 2y - 2 = x(y + 1) - 2(y + 1)$
 $= (x - 2)(y + 1)$ 이므로
 $(x - 2)(y + 1) = 3$ 에서 문제의 x, y 는
 i) $x - 2 = 1, y + 1 = 3$ 일 때, $x = 3, y = 2$
 ii) $x - 2 = 3, y + 1 = 1$ 일 때, $x = 5, y = 0$
 iii) $x - 2 = -1, y + 1 = -3$ 일 때, $x = 1, y = -4$
 iv) $x - 2 = -3, y + 1 = -1$ 일 때,
 $x = -1, y = -2$
 x, y 는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 (3, 2) 뿐이다.

37. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots\text{㉠}$$

㉠에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37

38. $xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 에서

$x(y - 3) - 3(y - 3) - 5 = 0, (x - 3)y - 3 = 5$

$x \geq 1, y \geq 1$ 이므로 $x - 3 \geq -2, y - 3 \geq -2$

(i) $x - 3 = 1, y - 3 = 5$ 일 때, $x = 4, y = 8$

(ii) $x - 3 = 5, y - 3 = 1$ 일 때, $x = 8, y = 4$

따라서, 구하는 값은 $x + y = 4 + 8 = 8 + 4 = 12$

39. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{를 } t \text{로 치환하면}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{는 } 3 \text{이 된다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

40. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $-\frac{8}{9}$

⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2 + 3ax - 2a) = 0$$

i) 중근이 $x=1$ 인 경우

$x=1$ 을 $x^2 + 3ax - 2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$$1 + 3a - 2a = 0$$

$$\therefore a = -1$$

ii) $x^2 + 3ax - 2a = 0$ 이 중근을 갖는 경우

$$\text{판별식 } D = 9a^2 + 8a = 0, \quad a(9a + 8) = 0,$$

$$\therefore a = 0, \quad a = -\frac{8}{9}$$

$$-1 + 0 - \frac{8}{9} = -\frac{17}{9}$$

41. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

42. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20} + \omega^{10} + 1$
(2) $\omega^{101} + \overline{\omega}^{101} - \omega^{11} \cdot \overline{\omega} - \omega \cdot \overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω 가 $x^2 - x + 1$ 의 근이므로
 $\overline{\omega}$ 도 $x^2 - x + 1$ 의 근이다.
즉, $\omega^3 = -1, \overline{\omega}^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$
(1) $\omega^{20} + \omega^{10} + 1$
 $= (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega + 1$
 $= (-1)^6 \cdot \omega^2 + (-1)^3 \cdot \omega + 1$
 $= \omega^2 - \omega + 1 = 0$

(2) $\omega^{101} + \overline{\omega}^{101} - \omega^{11}\overline{\omega} - \omega\overline{\omega}^{11}$
 $= (\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 + (\overline{\omega}^3)^{33} \cdot \overline{\omega}^2 -$
 $\omega\overline{\omega} \{ (\omega^3)^3 \cdot \omega + (\overline{\omega}^3)^3 \cdot \overline{\omega} \}$
 $= (-1)\omega^2 + (-1)\overline{\omega}^2 - \{ (-1)\omega + (-1)\overline{\omega} \}$
 $= -(\omega^2 - \omega) - (\overline{\omega}^2 - \overline{\omega})$
 $= -(-1) - (-1) = 2$

43. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}} \\ xy + 3y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$ 의 근 x, y 를 구할 때, $x+y$

의 값을 모두 구하면?

- ㉠ $-\frac{7}{2}, -1, 1, \frac{7}{2}$ ㉡ $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ ㉢ $-1, 1$
 ㉣ $-\frac{7}{2}, 1$ ㉤ $1, \frac{7}{2}$

해설

$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}} \times 8$ 에서 $x^2 - 11xy - 26y^2 = 0, (x + 2y)(x - 13y) = 0$
 $x + 2y = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉢}}$
 $x - 13y = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉤}}$
 $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}$ 에서 $y^2 = 1$
 $\therefore y = \pm 1, x = \mp 2$ (복호동순)
 $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}$ 에서 $16y^2 = 1$
 $\therefore y = \pm \frac{1}{4}, x = \pm \frac{13}{4}$ (복호동순)
 $\therefore x + y = -1, 1, \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}$

44. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=xy \\ \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=0 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 의 합 $x+y$ 의 값은?
(단, $xy \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$ 에서

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} \text{ 이므로}$$

$x+y=u, xy=v$ 라 하면

주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u-v=0 \cdots \textcircled{1} \\ \frac{u^2-2v}{v}=0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{u^2-2v}{v} = \frac{v(v-2)}{v} = 0$$

$\therefore v=0$ 또는 $v=2$

그런데 주어진 조건에서

$v=xy \neq 0$ 이므로 $v=2$ 이다.

따라서, ①에서 $u=v=2$ 이므로

$x+y=2$

45. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 이 한 개의 공통근 α 를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3:5$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ 0

해설

공통근이 α 이므로 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots \text{㉠}$

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots \text{㉡}$

㉠-㉡에서 $(a-b)(\alpha-1) = 0$

$a=b$ 이면 모순이므로 $a \neq b \therefore \alpha = 1$

$x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 의 공통이 아닌 근을 각각 β , γ

라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1 \cdot \beta = b$, $1 \cdot \gamma = a$

따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는

$\beta : \gamma = b : a = 3 : 5 \cdots \text{㉢}$

한편, ㉠에 $\alpha = 1$ 을 대입하면 $a+b+1=0 \cdots \text{㉣}$

㉢, ㉣에서 $a = -\frac{5}{8}$, $b = -\frac{3}{8}$

$\therefore a-b = -\frac{1}{4}$

46. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 6y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
이 때, x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = (1-y)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$
 $y^2 - 4y + 4 \leq 0, (y-2)^2 \leq 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2 = 0$
 $\therefore y = 2 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \therefore \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$

해설

주어진 식을 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$
 $x^2 + 2(1-y)x + (1-y)^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $\therefore (x+1-y)^2 + (y-2)^2 = 0$ x, y 가 실수이므로 $x+1-y = 0, y-2 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 2$
 $\therefore \frac{y}{x} = 2$