1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

2. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -5$

▷ 정답: $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$\therefore\ y = 0$

$y = 0$을 ㉢에 대입하면 $x = -5$

$\therefore\ x = -5,\ y = 0$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \cdots ㉠ \\ x - y = 1 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$　　② 4　　③ $-3\sqrt{2}$

④ -4　　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x - 2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

5. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 0$이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$이 된다.

6. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ······㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$······㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ······㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

7. 방정식 $x^2-2xy+y^2+|x+y-2|=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x-y)^2+|x+y-2|=0$
이 때, $(x-y)^2 \geq 0,\ |x+y-2| \geq 0$이므로
㉠이 성립하려면 $x-y=0,\ x+y-2=0$이어야 한다.
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=1$
$\therefore\ xy=1$

8. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y가 양의 정수이므로

$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

9. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b는 실수)

① $-i$ ② i ③ $-2i$

④ $3i$ ⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$
$(a+3)i+b-1=0$에서 a, b는 실수이므로 $a=-3, b=1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$
한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고
$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.
$\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1
즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$
$\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i}=-i$