

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^4 - 16 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

$$\therefore \text{모든 해의 합은 } (-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$$

2. 다음 방정식을 만족하는 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

▷ 정답 : $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$$\therefore y = 0$$

$y = 0$ 을 ㉡에 대입하면 $x = -5$

$$\therefore x = -5, y = 0$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$

② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$

③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ x - y = 1 \quad \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$ 로 변형하여

㉠에 대입하면

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x - 2y) = 0 \quad \therefore x = y \text{ 또는 } x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2, y = \pm 2$

ii) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

5. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값은?

① $-p$

② p

③ 0

④ 3

⑤ -3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$ 이 된다.

6. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.

주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

7. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

㉠이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$

$\therefore xy = 1$

8. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$

9. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① $-i$

② i

③ $-2i$

④ $3i$

⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
 따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
 한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
 우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
 따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 $\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
 네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
 즉 $i \times (\text{나머지 세 근의 곱}) = 1$
 $\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$