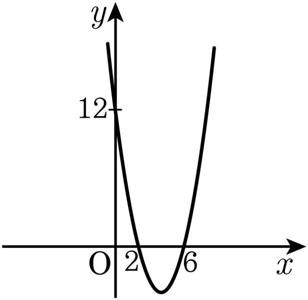
1. 다음은 이차함수 $y=(x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=6$
따라서 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=4$

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 이차함수 $y=-3x^2-6x+1$ 의 최댓값과 최솟값을 차례로 구하면?

① 4 , 없다　② 1 , 없다　③ -1 , 없다

④ 없다, 4　⑤ 없다, 1

해설

$y=-3x^2-6x+1=-3(x^2+2x)+1=-3(x+1)^2+4$

따라서 최댓값은 4 , 최솟값은 없다.

4. 이차함수 $y = -2x^2 - 4x - 6$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$y = -2x^2 - 4x - 6$$
$$= -2(x+1)^2 - 4$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 -4를 갖는다.

5. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -2

해설

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$
$$= -2(x-1)^2 + 3$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

6. 다음 이차함수의 최댓값이 3 인 것은?

① $y = -x^2 + 3$

② $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}$

③ $y = -(x-1)^2$

④ $y = -\frac{4}{3}(x+5)^2$

⑤ $y = -x^2$

해설

① $x = 0$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

② $x = 0$ 일 때, 최댓값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

③ $x = 1$ 일 때, 최댓값 0을 갖는다.

④ $x = -5$ 일 때, 최댓값 0을 갖는다.

⑤ $x = 0$ 일 때, 최댓값 0을 갖는다.

7. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

8. 이차함수 $y=-x^2+10x-13$ 의 최댓값을 m, 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+10x-13=-(x-5)^2+12$

최댓값 $m=12$

$y=\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$

최솟값 $n=\frac{1}{2}$

$\therefore mn=12\times\frac{1}{2}=6$

9. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서

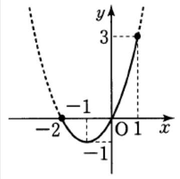
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.

즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$

따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,

$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

구하는 합은 $3 - 1 = 2$



10. 이차함수$y=-2+3x-x^2$ $(-1\le x\le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$ 이므로

$x=\frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1\le x\le 2$ 에 포함되므로

$x=\frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x=-1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

11. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

12. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

13. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

14. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

15. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면

$4 - x = -x^2 + kx \quad \Rightarrow \quad x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$

이어야 한다.

$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k + 1 = \pm 4$

$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

16. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11　　② 21　　③ 25　　④ 81　　⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

17. 두 이차함수의 그래프 $y=x^2-2ax+4$, $y=2x^2-2ax+a^2+3a$가 모두 x축과 교점을 갖도록 상수 a의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \le a \le -5$ ② $-6 \le a \le -2$ ③ $-3 \le a \le 0$

④ $2 \le a \le 5$ ⑤ $3 \le a \le 7$

해설

이차함수 $y=x^2-2ax+4$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면
$x^2-2ax+4=0$에서

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1\cdot 4 \ge 0,\ a^2-4 \ge 0,\ (a+2)(a-2) \ge 0$$

$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2$ ······ ㉠

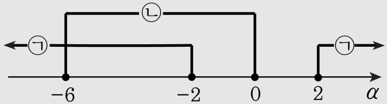
또, 이차함수 $y=2x^2-2ax+a^2+3a$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면

$2x^2-2ax+\left(a^2+3a\right)=0$에서

$$\frac{D_2}{4}=a^2-2\left(a^2+3a\right) \ge 0,\ a^2+6a \le 0,\ a(a+6) \le 0$$

$\therefore -6 \le a \le 0$ ······ ㉡

이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x축과 교점을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 위의 수직선에게 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \le a \le -2$

18. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$이 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$a^2 - 6a - 27 < 0$

$(a+3)(a-9) < 0$

$\therefore -3 < a < 9$

19. 이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때, 정수 m 의 최댓값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면
$y - m = (x-1)^2 + (x-1) - 1$
$\therefore\ y = x^2 - x - 1 + m$
이 함수의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식
$x^2 - x - 1 + m = 0$ 에서
$D = 1 - 4(-1+m) > 0$
$5 - 4m > 0 \qquad \therefore\ m < \dfrac{5}{4}$
따라서 정수 m 의 최댓값은 1 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 접하도록 하는 상수 $p,\ q$의 값은?

① $p = -1,\ q = -1$ 또는 $p = -3,\ q = -9$

② $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

③ $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

④ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

⑤ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가

점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$4 = 1 - 2p + q$에서

$2p - q = -3 \cdots$ ㉠

한편, x축에 접하므로

$D/4 = p^2 - q = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

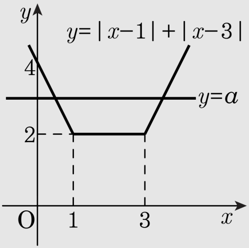
21. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



22. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

23. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

24. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면

$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = t(t+1)+3t-6 \\ &= t^2+4t-6 \\ &= (t+2)^2-10\ (t\geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

25. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $-4 \leq t \leq 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t-3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

26. 합이 28 인 두 자연수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 100 ② 121 ③ 144 ④ 169 ⑤ 196

해설

한 자연수를 x 라 하면, 나머지는 $28 - x$ 이다.
두 자연수의 곱은 $x(28 - x)$ 이다.
$x(28 - x) = -x^2 + 28x = -(x - 14)^2 + 196$

27. 합이 30 인 두 수가 있다. 두 수의 곱이 최대가 되는 두 수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 15

해설

두 수를 각각 x , $30-x$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} y &= x(30-x) \\ &= -x^2+30x \\ &= -(x-15)^2+225 \end{aligned}$$

$x=15$ 일 때, 최댓값 225 를 가지므로 $30-x=15$ 이다.

28. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 x, $x+4$라 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (x+4)^2 \\ &= 2x^2 + 8x + 16 \\ &= 2(x+2)^2 + 8 \end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x = -2,\ x + 4 = 2$

따라서 구하는 두 수는 -2, 2

29. 합이 20 인 두 수의 곱이 최대가 될 때, 이 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 10

해설

두 수를 각각 x, $20-x$라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(20-x) \\ &= -x^2+20x \\ &= -(x-10)^2+100 \end{aligned}$$

$x=10$ 일 때, 최댓값 100을 갖는다.

$\therefore\ x=10,\ 20-x=10$

따라서 두 수는 10, 10

30. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

31. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

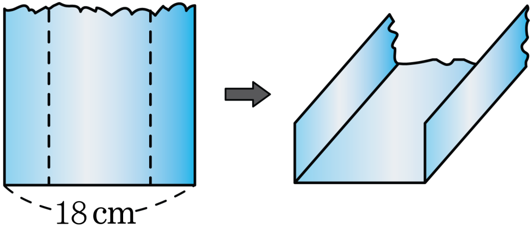
$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

32. 다음 그림과 같이 너비가 18cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 되도록 하려면 물받이의 높이를 얼마로 해야 하는가?



① 4.5 cm ② 4.0 cm ③ 3.8 cm

④ 3.6 cm ⑤ 3.4 cm

해설

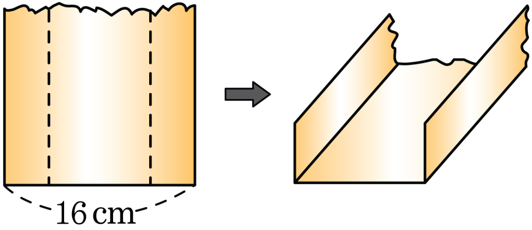
물받이의 높이를 x 라 할 때,

단면의 넓이는 $y = x(18 - 2x)$

$$y = -2x^2 + 18x = -2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{2}$$

따라서 $x = \frac{9}{2}$(cm) 일 때, 최대값 $\frac{81}{2}$(cm^2)를 갖는다.

33. 다음 그림과 같이 너비가 16cm 인 철판의 양쪽을 접어 직사각형인 물받이를 만들었다. 단면의 넓이를 최대가 되게 하는 높이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 4 cm

해설

높이를 $x$cm, 넓이를 $y$cm^2 라고 두면

$y = x(16 - 2x)$

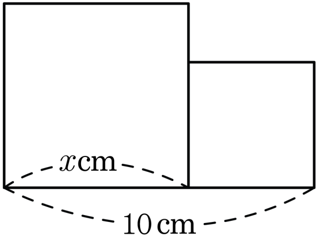
$= -2x^2 + 16x$

$= -2(x^2 - 8x + 16) + 32$

$= -2(x - 4)^2 + 32$ 이다.

따라서 $x = 4$ 일 때, 최댓값 32 를 가진다.

34. 다음 그림과 같이 길이가 10cm 인 선분을 둘로 나누어 각각을 한 변으로 하는 두 정사각형을 만들려고 한다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값을 구하여라.



① 20 ② 30 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

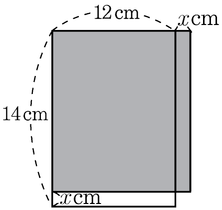
해설

한 정사각형의 한 변의 길이를 x cm , 다른 한 정사각형의 한 변의 길이를 $(10 - x)$ cm 라고 놓으면,

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \\ &= 2(x - 5)^2 - 50 \end{aligned}$$

따라서 최솟값은 50(cm^2) 이다.

35. 가로, 세로의 길이가 각각 12cm, 14cm 인 직사각형에 가로의 길이는 $x$cm 만큼 늘이고, 세로의 길이는 $x$cm 만큼 줄였을 때, 얻은 직사각형의 넓이를 $y$cm^2 라고 하면 y 가 최대가 되게 하는 x 의 값을 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 1 cm

해설

$$\begin{aligned} y &= (12+x)(14-x) \\ &= -x^2+2x+168 \\ &= -(x^2-2x+1-1)+168 \\ &= -(x-1)^2+169 \end{aligned}$$

$x=1$ 일 때, y 의 최댓값 169 을 갖는다.

36. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$m ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}$ m^2 을 가진다.

37. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 ym 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

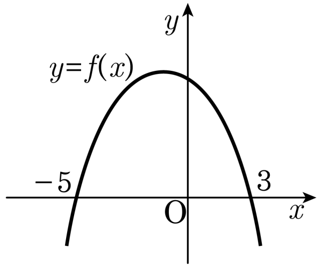
▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** 9 m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x-3)^2 + 9$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

38. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)\ (a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

39. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + (7-2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

40. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$
$M = k^2 + 4k$ 이므로
$M = (k + 2)^2 - 4$ 이다.
따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

41. $x+y=3,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\geq 0,\ y\geq 0$ 이므로
$y=-x+3\geq 0 \ \rightarrow\ -x\geq -3 \ \rightarrow\ x\leq 3 \therefore\ 0\leq x\leq 3\ (\because\ x\geq 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore\ x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore\ M-m=12$

42. x 에 대한 이차방정식 $x^2+4kx+5k^2-1=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2+4kx+5k^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면

$5k^2+4xk+\left(x^2-1\right)=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4}=(2x)^2-5\left(x^2-1\right)\geq 0$$

$-x^2+5\geq 0,\ x^2-5\leq 0$

$\therefore -\sqrt{5}\leq x\leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5}\leq \beta\leq \alpha\leq \sqrt{5}$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

43. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답 : ______ cm

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm 라 하면

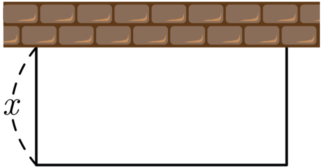
$$\begin{aligned} y &= x(24-x) \\ &= -x^2+24x \\ &= -(x-12)^2+144 \end{aligned}$$

$x=12$ 일 때, 최댓값 144 를 갖는다.

$\therefore x=12,\ 24-x=12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

44. 아래 그림과 같이 40 m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 6m ② 8m ③ 10m ④ 12m ⑤ 14m

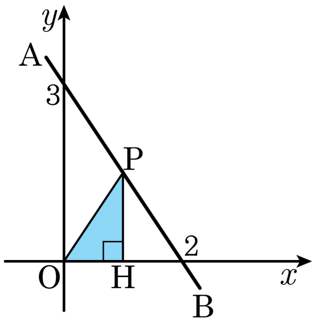
해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,

$$y = x(40-2x)$$
$$= -2x^2 + 40x$$
$$= -2(x-10)^2 + 200$$

$x = 10$ 일 때, 최댓값은 200 이다.

45. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle$POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0.75

해설

$\overline{\text{AB}}$ 를 지나는 직선은 두 점 (0, 3) , (2, 0) 을 지나므로

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $\left(a, -\frac{3}{2}a + 3\right)$

$$\begin{aligned}\triangle\text{POH} &= \frac{1}{2} \times a \times \left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a-1)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

46. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로의 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

① 10 m ② 20 m ③ 30 m ④ 40 m ⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40-x)$ m 이므로
목장의 넓이를 y m^2 라 하면
$y = x(40-x) = -x^2 + 40x = -(x-20)^2 + 400 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $0 < x < 40$ 이므로 ㉠은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

47. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 x% 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x$% 감소한다고 한다. 이 때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 x% 올리면 상품 1개당 판매 가격이

$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로

판매 금액은

$$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$$
$$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$$
$$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$$
$$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$$
$$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$$

따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

48. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후

④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다

해설

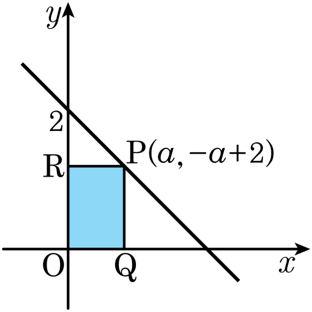
$y = 50t - 5t^2$

$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25)$

$\quad = -5(t-5)^2 + 125$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

49. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$, 직사각형 OQPR 의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$ 이고 넓이는 y 이므로

$$\begin{aligned} y &= a(-a+2) = -a^2+2a \\ &= -(a^2-2a+1)+1 \\ &= -(a-1)^2+1 \end{aligned}$$

따라서 y 의 최댓값은 1 이다.