1. 평행이동 $(x, y) \to (x+1, y-1)$ 에 의하여 원점으로 옮겨지는 점은?

① $(-1, 1)$ ② $(0, 0)$ ③ $(1, -1)$
④ $(1, 1)$ ⑤ $(-1, -1)$

해설

(a, b) 라 하면

$(a+1, b-1) = (0, 0)$
$\therefore (a, b) = (-1, 1)$

2. 평행이동 $f : (x, y) \to (x+2,\ y+1)$ 에 의하여 점 $(1, 2)$ 는 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(-1,\ 1)$ ② $(2,\ 1)$ ③ $(2,\ 4)$

④ $(3,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 4)$

해설

$f(x, y) \to (x+2,\ y+1)$

$f : (1,\ 2) \to (3,\ 3)$

3. 직선 $y = 2x + 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 y 절편은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선 $y = 2x + 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y + 1 = 2(x - 2) + 1$,

$y = 2x - 4$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 -4 이다.

4. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축 방향으로 1 , y 축의 방향으로 –2 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 9 ② 7 ③ 5 ④ 3 ⑤ 1

해설

$y = 2x + 3$

$\Rightarrow \quad y + 2 = 2(x - 1) + 3$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 1$

$\therefore \quad a + b = 1$

5. 점 $\mathrm{A}(1,-2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는?

① $(2,-1)$ ② $(1,\ 3)$ ③ $(1,\ 2)$

④ $(1,-1)$ ⑤ $(0,-2)$

해설

$\mathrm{A}(1,-2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,1)$ 이다.
이 점을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축 의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$(0,-2)$ 가 된다.

6. 평행이동 $f:(x,y)\to(x-2,y+1)$ 에 의하여 직선 $2x+y+5=0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y+2=0$ ③ $2x+y+6=0$

④ $2x+y+8=0$ ⑤ $2x+y+9=0$

해설

$x'=x-2,\quad y'=y+1$ 이라 하자.

x,y 를 원래 식에 대입하면,

$2(x'+2)+(y'-1)+5=0$

$\Rightarrow\quad 2x'+y'+8=0$

$\Rightarrow\quad 2x+y+8=0$

7. 직선 $3x+4y-5=0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x+4y-5=0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2)+4(y+3)-5=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x+4y+1=0$

따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

8. 직선 $2x-y+3=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+3=0$ ② $2x-y-3=0$ ③ $2x+y-3=0$

④ $x-2y-3=0$ ⑤ $x-2y+3=0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

9. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$　② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$　④ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

⑤ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

해설

원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

10. 도형 $y = 2x$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y = 2x$　② $y = -2x$　③ $y = \frac{1}{2}x$

④ $y = -\frac{1}{2}x$　⑤ $y = 2x + 1$

해설

$y = x$대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

11. 직선 $y = 3x - 3$의 그래프를 직선 $y = x$에 대칭이동한 직선의 방정식은?

① $y = 3x + 1$ ② $y = \frac{1}{3}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{3} + 1$

④ $y = \frac{1}{3}x - 1$ ⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

12. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1 + a,\ -2 + b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1 - a,\ 2 - b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a = -2,\ b = 0$
$\therefore a + b = -2$

13. 직선 $y = 2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a - 4b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a, b)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이므로 $\mathrm{R}(b, a)$ 이고
Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로
$\mathrm{Q}(b-1, a)$ 이다.
또, P 와 Q 는 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이므로
$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y = 2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y = 2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$= \frac{b-a}{a-b+1} = -\frac{1}{2} \cdots$① 이고,
$\frac{a+b}{2} = 2\left(\frac{a+b-1}{2}\right) \cdots$②
①에서 $a - b = 1$
②에서 $a + b = 2$
$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2}$, $2a - 4b = 3 - 2 = 1$

14. 좌표평면 위에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ 3 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를
직선 $y=x$에 대하여
대칭이동 시킨 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 이고,
이 원의 중심은 $(3,1)$이다.
두 원의 중심거리는
두 점 $(1,3),(3,1)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

15. 도형 $y = 2x + 3$을 점 $(2, 3)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $2x - y + 5 = 0$　② $2x + 2y - 5 = 0$

③ $2x + y + 5 = 0$　④ $2x - y - 5 = 0$

⑤ $2x - 2y + 5 = 0$

해설

점 (a, b)에 대하여 대칭이동하려면

$x \to 2a - x,\ y \to 2b - y$를 대입하면 된다. $y = 2x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$과 (a, b)의 중점 $(2, 3)$

$\frac{0 + a}{2} = 2,\ \frac{3 + b}{2} = 3$

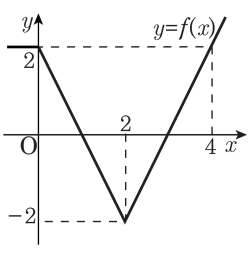
$a = 4,\ b = 3$

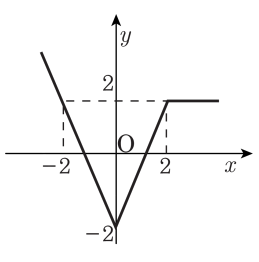
$\therefore\ y = 2x + 3$과 기울기는 동일하며 $(4,\ 3)$ 지남.

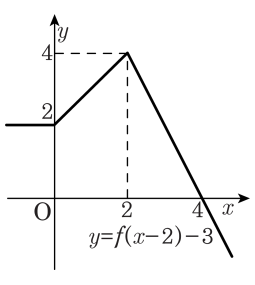
$\to y = 2x + b,\ (4, 3) \to 3 = 8 + b \to b = -5$

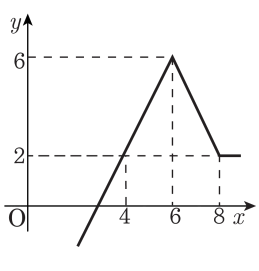
$\therefore\ y = 2x - 5$

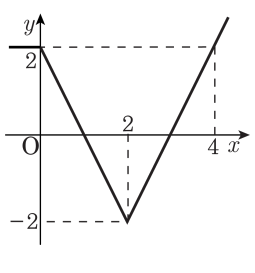
16. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2 - x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

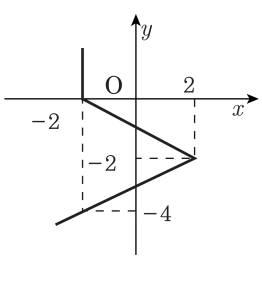


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$y = f(2 - x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

17. 다음 중 원 $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ ② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$ ④ $(x+1)^2+y^2=3$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 에서 $(x+3)^2+(y-3)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4인 ⑤이다.

18. 점 (1, 4) 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① −2 ② −1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를 지나므로 구하는 기울기는 $\frac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$

19. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면
$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$
$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2$ ····· ㉠
이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3,2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$9m^2+12m+4=4m^2+4$
$\therefore\ 5m^2+12m=0$
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$ 이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

20. 점 $(-2,\ 1)$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -5 ④ -3 ⑤ -2

해설

두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의
중점이 직선 $y = x - 1$ 위에 있으므로

$$\frac{1+b}{2} = \frac{-2+a}{2} - 1\ ,$$

$\therefore\ a - b = 5\ \cdots$ ㉠

또, 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 직선의

기울기가 -1 이므로 $\dfrac{b-1}{a-(-2)} = -1$

$\therefore\ a + b = -1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = 2\ ,\ b = -3$

$\therefore\ ab = -6$

21. $(3,\ 1)$ 의 직선 $y=2x+3$ 에 대한 대칭점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$와 $(3,\ 1)$을 지나는 직선은 직선 $y=2x+3$와 수직이다.

이 직선은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 $(a,\ b)$는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a,-\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a,-\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y=2x+3$ 과의 거리가

점 $(3,1)$ 과 직선 $y=2x+3$ 과의 거리와 같으므로

점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2\cdot 3+3-1|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2a+3+\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$|5a+1|=16$

$\therefore\ a=3$ 또는 $-\frac{17}{5}$

$(3,\ 1)$의 대칭점이 $(a,\ b)$이므로 $a\neq 3$,

$a=-\frac{17}{5}$ 일 때, $b=\frac{21}{5}$

$\therefore\ a+b=\frac{4}{5}$

22. 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+2b=5 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$

따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

23. 두 점 A(1, 3), B(4, m) 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

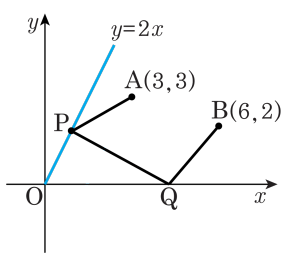
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$ 이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 A′(1, -3) 이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25,\ (m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$

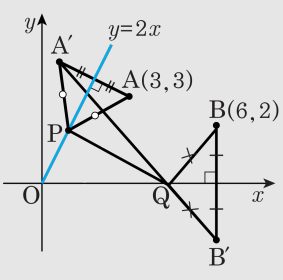
24. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(3,3), \mathrm{B}(6,2)$ 와 직선 $y=2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값은?



① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$
⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(3,3)$ 을 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}, \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B}'\mathrm{Q}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}'}$

$\geq \overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$

따라서, 구하는 최솟값은 선분 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 길이이다.

이때, 점 $\mathrm{A}'(a,b)$ 라고 하면

직선 AA' 과 직선 $y=2x$ 가 수직이므로

$\frac{b-3}{a-3}\cdot 2=-1$

$\therefore a+2b=9 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은

직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$\frac{b+3}{2}=2\cdot\frac{a+3}{2}$

$\therefore 2a-b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{5},\ b=\frac{21}{5}$

$\therefore \mathrm{A}'\left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$

한편, 점 $\mathrm{B}'(6,-2)$ 이므로

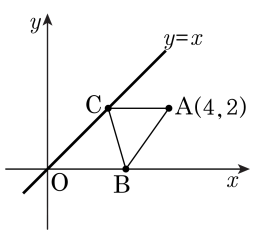
$$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}=\sqrt{\left(6-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-2-\frac{21}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2+\left(-\frac{31}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1690}{25}}=\frac{13\sqrt{10}}{5}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.

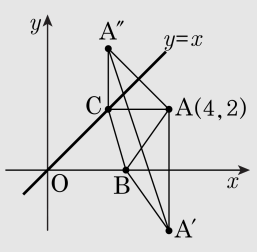
25. 다음 그림과 같이 점 A(4, 2) 와 x 축과 직선 $y = x$ 위에 각각 두 점 B, C 가 있다. 이 때, △ABC 의 둘레의 길이의 최솟값을 구하면?



① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{10}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

점 A(4, 2) 를 x 축에 대칭 이 동 한 점 A′(4, − 2) 와
$y = x$ 에 대칭이동한 점 A″(2, 4) 를 구하여
연 결 하 면 다 음 그 림 에 서



$$(\triangle ABC\text{의 둘레}) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$$
$$= \overline{A'B} + \overline{A''C} + \overline{BC} \geq \overline{A'A''}$$

점 B 와 C 를 직선 A′A″ 이 각각 x 축과 직선 $y = x$ 와 만나는 점으로 잡을 때, △ABC 의 둘레의 길이가 최소이다.
이 때, 최솟값은 $\sqrt{(4-2)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.