

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 다시 $y = 2x - 3$ 의 그래프가 되었다. 이 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = 2x - 3$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한
직선의 방정식은
 $y - b = 2(x - a) - 3$
직선의 방정식을 정리하면
 $y = 2x - 2a - 3 + b$
원래 직선과 같아졌으므로
 $-2a + b - 3 = -3, 2a = b,$
 $\therefore \frac{b}{a} = 2$

3. 원 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

원 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로
3 만큼 평행이동하면 $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
이 원을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면
 $(y - 3)^2 + (x + 1)^2 = 4$,
 $\therefore (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 이
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 와 일치하므로
 $a = -1$, $b = 3$
 $\therefore a + b = 2$

4. 다음 두 집합 사이의 관계를 기호 $\subset, \not\subset$ 를 나타냈을 경우 $A \subset B$ 인 개수를 구하여라.

- ㉠ $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d, e\}$
- ㉡ $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$
- ㉢ $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$
- ㉣ $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

㉠ $A \subset B$ ㉡ $A \not\subset B$ ㉢ $A \subset B$ ㉣ $B \subset A$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = A$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $A \subset B$

② $(A \cap B) \subset A$

③ $A \cap B = B$

④ $(A \cap \emptyset) \cup B = A$

⑤ $(A \cup B) \subset (A \cap B)$

해설

$A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다.

① $B \subset A$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

⑤ $(A \cup B) \subset (A = B)$ 은 $A \subset B$ 와 같으므로 옳지 않다.

6. 두 원 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = 1$, $x^2 + (y+2b)^2 = 9$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은?

- ① $a^2 + b^2 < 4$ ② $4 < a^2 + b^2 < 16$
③ $a^2 + b^2 < 16$ ④ $1 < 4a^2 + 9b^2 < 10$
⑤ $a^2 + b^2 < 25$

해설

두 원의 중심이 각각 $(-a, -b)$, $(0, -2b)$ 이므로
중심거리 d 는

$$d = \sqrt{(-a-0)^2 + (-b+2b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

따라서 두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 조건은

$$3-1 < \sqrt{a^2 + b^2} < 3+1$$

$$\therefore 4 < a^2 + b^2 < 16$$

7. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

8. 기울기가 2 이고 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 두 직선의 y 절편을 각각 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은?(단 $a > b$)

① 3

② $2\sqrt{3}$

③ 4

④ $2\sqrt{7}$

⑤ $6\sqrt{5}$

해설

기울기가 2 이고

원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{2^2 + 1}$$

곧 $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ 이므로

$$a = 3\sqrt{5}, b = -3\sqrt{5} (\because a > b)$$

$$\therefore a - b = 6\sqrt{5}$$

9. 점 $(1, 3)$ 에서 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m 이라 하면
 $y = m(x - 1) + 3$
직선이 원에 접하므로 이 직선과 원의 중심 사이의 거리는 반지름과 같다.
 $\frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 - m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$
 $(-m + 3)^2 = 5(m^2 + 1)$
방정식을 풀면, $m = -2, \frac{1}{2}$
 $\therefore$ 직선의 방정식은 $2x + y - 5 = 0, x - 2y + 5 = 0$
 $\therefore a^2 + b^2 = 5$

10. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2 |x| \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 = 2 |x + y| \cdots \textcircled{L}$$

㉠)과 ㉡)에서 $2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x + y$

$$\therefore x + y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{C}$$

㉠과 ㉡의 교점의 개수는 다음 그림

에서 5개이다.

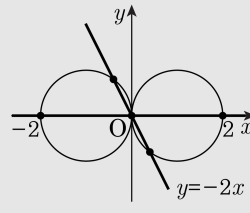
실제로, 교점을 구하면

$(0, 0), (\pm 2, 0),$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5}\right)$$

(복부호동순)

(복부호동순)



11. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f : (x, y) \rightarrow (x-a, y-1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y+1) = (x+a)^2 - 2(x+a)$
 $y = x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
 y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
 $x^2 + (2a-4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x 좌표를 x_1, x_2 라 하면
 $x_1 + x_2 = -(2a-4)$
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a-4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

12. $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 중에서 홀수를 적어도 1개 포함하는 집합의 개수는?

① 12개 ② 16개 ③ 32개 ④ 56개 ⑤ 64개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

전체 부분집합의 개수: $2^6 = 64$

홀수를 적어도 1개 포함하는 집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 홀수가 하나도 포함되지 않은 부분집합의 개수를 빼면 된다.

$$2^6 - 2^3 = 64 - 8 = 56 \text{ (개)}$$

13. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

대우 : $x = 0, y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

14. $x^2 - ax + 6 \neq 0$ 이 $x - 2 \neq 0$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$p \rightarrow q \text{ (T)} \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p \text{ (T)}$
즉, 주어진 명제가 참이면 그 대우도 참
대우 : $x = 2 \Rightarrow x^2 - ax + 6 = 0 \text{ (T)}$
 $\therefore a = 5$

15. 두 집합 $A = \{a-1, a+2, 8\}$, $B = \{3, 6, b\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$A = B$ 이므로
 $a-1=3$ 에서 $a=4$, $b=8$
 $\therefore a+b=12$

16. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } a \text{ 이하인 } 5\text{의 배수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5개이어야 한다.
 $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

17. 전체집합 $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 $A \cup B = U$, $A \cap B = \{30, 50\}$ 을 만족한다. 집합 A, B 의 원소의 합을 각각 $S(A), S(B)$ 라고 할 때, $S(A) + S(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$S(A) + S(B)$ 의 값을 구하는 것이므로
각 원소를 아무렇게 배열해도 원소의 합은 같다.
 $\therefore 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + (30 + 50) = 290$

18. 축구공을 가지고 있는 학생은 15 명, 농구공을 가지고 있는 학생은 10 명, 둘 다 가지고 있는 학생이 3 명일 때, 축구공 또는 농구공을 가지고 있는 학생은 몇 명인가?

① 21 명 ② 22 명 ③ 23 명 ④ 24 명 ⑤ 25 명

해설

축구공을 갖고 있는 학생과 농구공을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A , B 라 하면, 둘 다 가지고 있는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.
 $n(A) = 15$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 3$
 $n(A \cup B) = 15 + 10 - 3 = 22$

19. 실수 x 에 대하여 두 조건 $p : a \leq x \leq 1$, $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$

② $a \leq 1$

③ $-1 \leq a \leq 1$

④ $a \geq -1$

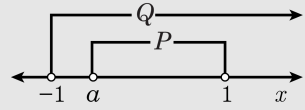
⑤ $a \leq -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(i) $a > 1$ 일 때, $P = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q \therefore a > 1$

(ii) $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii)에서 $a \geq -1$

20. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건인 것은?

- ① $p : a + b > 0, ab > 0, q : a > 0, b > 1$
- ② $p : \frac{a}{b} > 1, q : a > b > 1 (a, b \text{ 는 실수})$
- ③ $p : a + b > 2, q : a \geq 1 \text{ 또는 } b \geq 1 (a, b \text{ 는 실수})$
- ④ $p : ab = 0, |a| + |b| = 0$
- ⑤ $p : a + b \geq 2, ab \geq 1, Q : a \geq 1, b \geq 1$

해설

① 반례 : $a = 2 + i, b = 2 - i$ 이면

$$a + b = 4 > 0, ab = 5 > 0$$

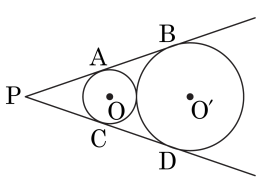
$\therefore$ 필요조건

② 반례 : $a = -2, b = -1$ 이면

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2 > 1$$

$\therefore$ 필요조건

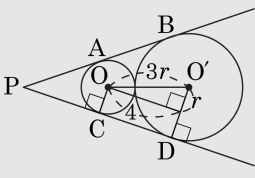
21. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O'의 공통외접선의 교점을 P, 접점을 A, B, C, D라고 하자. $\overline{PA} = \overline{AB} = 4\text{ cm}$ 일 때, 원 O의 넓이를 구하면?



- ① $\pi\text{ cm}^2$
 ② $2\pi\text{ cm}^2$
 ③ $3\pi\text{ cm}^2$
- ④ $4\pi\text{ cm}^2$
 ⑤ $5\pi\text{ cm}^2$

해설

$\triangle POA$ 와 $\triangle PO'B$ 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2이다.
 $\therefore \overline{OA} = r$ 이라 하면, $\overline{O'B} = 2r$
 다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$
 $\Rightarrow r = \sqrt{2}$
 $\therefore$ 원 O의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$



22. 자연수 전체의 집합의 부분집합 A 에 대하여 다음을 만족하는 집합 A 의 개수는? (단, $A \neq \emptyset$)

$$x \in A \Rightarrow \frac{81}{x} \in A$$

- ① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

A 는 81의 약수를 원소로 하는 집합인데
 $n(A) = 1$ 인 경우는 {9} 1개
 $n(A) = 2$ 인 경우는 {1, 81}, {3, 27} 2개
 $n(A) = 3$ 인 경우는 {1, 9, 81}, {3, 9, 27} 2개
 $n(A) = 4$ 인 경우는 {1, 3, 27, 81} 1개
 $n(A) = 5$ 인 경우는 {1, 3, 9, 27, 81} 1개
 $\therefore$ 7개

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap \{1, 3\} = B, B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 이면 $B \subset A, \{2, 3, 4\} \subset A$
 $A \cap \{1, 3\} = B$ 이면 $\{3\} \subset B \subset \{1, 3\}$
따라서 B 는 2, 4, 5 를 원소로 가질 수 없으므로 $n(B)$ 의 최댓값은 2
 $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1, 3\}$ 이고, $A \cap \{1, 3\} = B$ 에서 $1 \in A$
또, $5 \in A$ 라고 가정하면, $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 에서 $5 \in B$ 이어야 하므로 모순
따라서 $5 \notin A, n(A)$ 의 최댓값은 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때 4
따라서 $n(A) + n(B)$ 의 최댓값은 $2 + 4 = 6$

24. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

- (i) A 형인 사람은 B 형이 아니다.
(ii) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다.
(iii) C 형인 사람은 D 형이 아니다.
(iv) E 형인 사람은 B 형이다.

이

가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

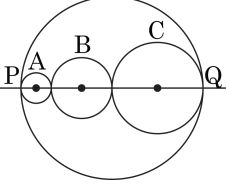
- ☐ ㉠ A 형인 사람은 E 형이 아니다.
☐ ㉡ E 형인 사람은 C 형이 아니다.
☐ ㉢ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv) 를 명제로 표현하면 $A \Rightarrow \sim B, \sim C \Rightarrow \sim B, C \Rightarrow \sim D, E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면
(i) 의 대우 : B 형이면 A 형이 아니다.
즉, $B \Rightarrow \sim A$
(ii) 의 대우 : B 형이면 C 형이다.
즉, $B \Rightarrow C$
(iii) 의 대우 : D 형이면 C 형이 아니다.
즉, $D \Rightarrow \sim C$
(iv) 의 대우 : B 형이 아니면 E 형이 아니다.
즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$
 $E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,
즉, $A \Rightarrow \sim E$
 $\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,
즉, $E \Rightarrow C$
 $D \Rightarrow \sim C, \sim C \Rightarrow \sim B, \sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$
따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

25. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
 ④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
 구의 겹넓이는
 $S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$
 $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
 PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$