1. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1}가 존재하므로, f는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$일 때,

$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는 4개이다.

2. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h\circ g)(x) = 3x+4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2) &= ((h\circ g)\circ f)(2)\\ &= (h\circ g)(f(2))\\ &= (h\circ g)(4)\\ &= 3\times 4+4 = 16\end{aligned}$$

3. 함수 $f(x)=|4x+a|+b$ 는 $x=3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

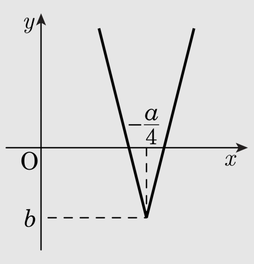
▷ 정답 : 10

해설

$f(x)=|4x+a|+b=\left|4\left(x+\frac{a}{4}\right)\right|+b$ 의 그래프는

$y=|4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x=-\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4}=3,\ b=-2$

따라서 $a=-12,\ b=-2$ 이므로

$\therefore b-a=10$

4. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$의 양변에
$x = -1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

5. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1)=g(0)&=f((-1)-1)\\ &=f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)-3\\ &=-3 \end{aligned}$$

6. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에서 $Y = \left\{y \mid y\text{는실수}\right\}$ 로의 함수 $f(x) = x + 1$ 과 같은 함수 $g(x)$ 는?

① $g(x) = 2x + 1$　② $g(x) = |x| + 1$　③ $g(x) = x^2 + 1$

④ $g(x) = x^3 + 1$　⑤ $g(x) = x^3 - 1$

해설

정의역과 공역이 같으므로 정의역에 속하는 모든 값에 대한 함숫값만 같으면 두 함수는 서로 같다.

$f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$

① $g(-1) = -3$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

② $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

③ $g(-1) = 2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

④ $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$ 이므로 $f = g$

⑤ $g(-1) = -2$ 이므로 $f(-1) \neq g(-1)$

7. 정의역이 $X = \{-1, 1\}$ 일 때 항등함수가 될 수 없는 것을 고르면?

① $f(x) = x$ ② $f(x) = x^2$ ③ $f(x) = \frac{1}{x}$
④ $f(x) = x^3$ ⑤ $f(x) = x|x|$

해설
$f(a) = a$ 가 항등함수의 정의이므로
①, ③, ④, ⑤ : $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$
② : $f(-1) = f(1) = 1$ 이므로
②는 항등함수가 될 수 없음

8. 세 함수 $f(x)=x+1,\ g(x)=-x+a,\ h(x)=bx+2$ 가 $h\circ f=g$ 를 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은 얼마인가?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(x+1)=b(x+1)+2=bx+b+2$

$g(x)=-x+a$ 이므로, $bx+b+2=-x+a$

$b=-1,\ b+2=a$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ a+b=0$

9. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

10. $f\left(x^2-3x\right)=4x^2-12x+9$ 일 때, $f(-2)$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^2-3x=-2$ 에서 $x=1,\ 2$

i) $x=1$ 일 때, $f(-2)=4-12+9=1$

ii) $x=2$ 일 때, $f(-2)=16-24+9=1$

i), ii) 에서 $f(-2)=1$

11. $f : x \to x+3,\ g : x \to 3x+1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = g(x)$를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x-4$　② $h(x) = x-9$　③ $h(x) = x-6$

④ $h(x) = 2x-3$　⑤ $h(x) = 2x-6$

해설

$(g \circ f)(x) = g(x+3) = 3(x+3)+1$

$\qquad\qquad = 3x+10$ 이므로

$(h \circ g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(3x+10) = 3x+1$

$3x+10 = t$ 라 하면 $3x = t-10$

$\therefore\ h(t) = (t-10)+1 = t-9$

$\therefore\ h(x) = x-9$

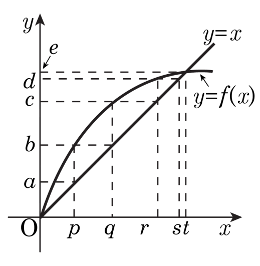
12. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$　② $y = \frac{1}{4}x - 2$　③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x,\ a(2x-1) + b = x$
$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

13. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p　　② q　　③ r

④ s　　⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

14. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

① $y = \sqrt{x+1}$(단, $x \geq -1$)　② $y = \sqrt{x+2}$(단, $x \geq -2$)
③ $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)　④ $y = \sqrt{x+4}$(단, $x \geq -4$)
⑤ $y = \sqrt{x+5}$(단, $x \geq -5$)

해설

$x \geq 0$이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$을 x에 대하여 풀면
$x^2 = y + 3$에서 $x = \pm\sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$이어야 하므로
$x = \sqrt{y+3}$(단, $y \geq -3$)
여기서, x, y를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)

15. $f(x)=\begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x>0) \end{cases}$, $g(x)=f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x)=g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

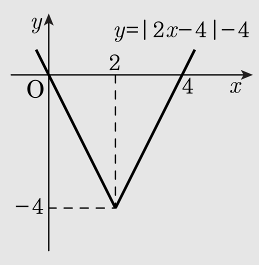
$h(0)=g^{-1}(0)=k$
$g(k)=f(k+4)=0$
$\therefore\ k+4=0$
$\therefore\ k=-4$
$\therefore\ h(0)=-4$

16. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.
따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

17. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 기함수이고 $f(1) = 3$을 만족시킬 때, $a + b - c$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(-x) = -f(x)$

$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$

따라서 $a = 0$, $c = 0$ $\therefore f(x) = bx$

$f(1) = 3$이므로 $f(1) = b = 3$

$\therefore a + b - c = 3$

18. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

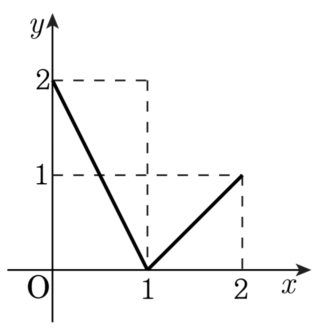
㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$
따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4,\ f(x)$는 정수$\}$ 이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ 일 때
$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

19. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$의 그래프이다.



$f \circ f = f^2,\ f \circ f^2 = f^3,\ \cdots,\ f \circ f^n = f^{n+1}$ 로 정의할 때, $f^{10}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① $\frac{1}{3}$　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

그림에서

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2\ (0 \le x \le 1) \\ x - 1 (1 \le x \le 2) \end{cases}$$ 이므로,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f(\frac{1}{3}) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$$\vdots$$

$$f^{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

20. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.
함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
$f(1) = 1,\ f(5) = 3$
$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠
$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

21. $g(x)=2+\dfrac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}(x)=x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은?(단, f^{-1}, g^{-1} 은 $f(x)$, $g(x)$ 의 역함수)

① $\dfrac{2x-3}{x+2}$　② $\dfrac{x-2}{2x+3}$　③ $\dfrac{2x+3}{x-2}$
④ $\dfrac{x+2}{2x-3}$　⑤ $\dfrac{x-2}{2x-3}$

해설

$(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}(x)=(g\circ f)(x)=g\{f(x)\}$

$\therefore\ g\{f(x)\}=2+\dfrac{7}{f(x)-2}=x$

$\rightarrow\ \dfrac{7}{f(x)-2}=x-2$

$\rightarrow\ 7=\{f(x)-2\}(x-2)$

$\rightarrow\ 7=xf(x)-2f(x)-2x+4$

$\rightarrow\ 2x+3=f(x)(x-2)$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

해설

$(f^{-1}\circ g^{-1})^{-1}(x)=(g\circ f)(x)=x$ 에서

$f(x)=g^{-1}(x)$

$g(x)=2+\dfrac{7}{x-2}$ 에서 역함수를 구하기 위해 x, y 를 바꾸면

$x=2+\dfrac{7}{y-2}$, $(x-2)(y-2)=7$

$y-2=\dfrac{7}{x-2}$, $y=\dfrac{7}{x-2}+2=\dfrac{2x+3}{x-2}$

$\therefore f(x)=g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

22. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 다음의 조건을 만족시킬 때, $f(2012)$의 값과 같은 것은?

Ⅰ. $f(-x) = f(x)$
Ⅱ. $f(x) = f(10-x)$

① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $f(2)$ ④ $f(3)$ ⑤ $f(4)$

해설

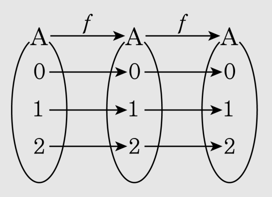
$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$는 y축에 대칭이고,
$f(x) = f(10-x) \Leftrightarrow y = f(x)$는
$x = 5$에 대칭이다,
따라서 함수 $y = f(x)$는 주기가 10이고,
$2012 = 201 \times 10 + 2$이므로
$f(2012) = f(201 \times 10 + 2) = f(2)$

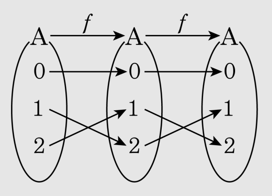
23. 임의의 자연수를 3 으로 나누었을 때, 나머지의 집합 A 에서 A 로의 함수 f 중 합성함수 $f \circ f$ 가 항등함수가 되는 f 의 개수를 구하여라.

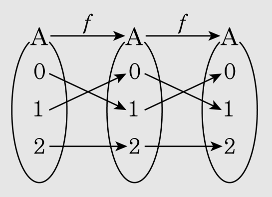
▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

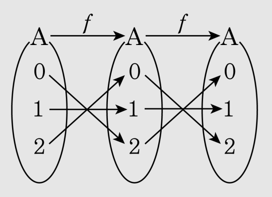
▷ 정답 : 4 개

해설









24. 두 함수 f 와 g 는 서로 역함수 관계이고 양의 실수 x , y 에 대하여 $f(x+y)=\frac{1}{2}f(x)f(y)$ 가 성립할 때, 다음 중 $g(xy)$ 를 $g(x)$, $g(y)$ 로 나타내면? (단, $f(1)=4$)

① $g(xy)=g(x)+g(y)$
② $g(xy)=g(x)+g(y)+1$
③ $g(xy)=g(x)g(y)$
④ $g(xy)=g(x)g(y)+1$
⑤ $g(xy)=2g(x)g(y)$

해설

$g(x)=a$, $g(y)=b$ 라 하면 f 가 g 의 역함수이므로 $x=f(a)$, $y=f(b)$

$xy=f(a)f(b)=2f(a+b)$

$\therefore\ \frac{xy}{2}=f(a+b)$

$\therefore\ g\left(\frac{xy}{2}\right)=a+b=g(x)+g(y)$

그런데 $g(xy)=g(x)+g(2y)=g(x)+g(y)+g(4)$

$f(1)=4$ 이므로 $g(4)=1$

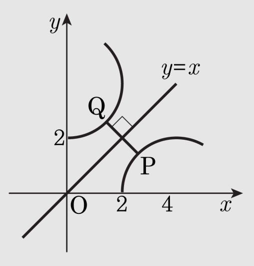
$\therefore\ g(xy)=g(x)+g(y)+1$

25. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 $P,\ Q$ 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.
$f(x) = \sqrt{x-2}$ 라 하면 $y^2 = x-2$
$\therefore\ x = y^2 + 2$
위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$
$\therefore\ f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$
한편, 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로
직선 $y = x$에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은
선분 PQ와 직선 $y = x$가 수직을 이룰 때이다.
동점 P , Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a,\ a^2+2)$ 라 놓고
직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|\,a - (a^2+2)\,|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$ 이므로

두 점 $P,\ Q$ 사이의 거리의 최소값은

$\therefore\ \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$