

1.  $x > 0, y > 0$  일 때,  $(3x + 4y) \left( \frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0, y > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left( \frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x} \cdot \frac{3x}{y}}$$

$$= 13 + 12 = 25$$

$$\therefore (3x + 4y) \left( \frac{3}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 25$$

(단, 등호는  $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$ , 즉  $x = 2y$  일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

2. 두 양수  $a, b$ 에 대하여  $\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0, b > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$$

$$= 1 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 4 \geq 5 \cdot 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는  $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$ , 즉  $b = 2a$  일 때 성립)

3.  $x > 0, y > 0$ 일 때,  $\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값은?

- ① 5                      ② 6                      ③ 7                      ④ 8                      ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right) &= 8xy + \frac{1}{2xy} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5 \\ &= 4 + 5 = 9\end{aligned}$$

4.  $2a + 3b = 12$ 를 만족하는 양수  $a, b$ 에 대하여  $ab$ 의 최댓값을 구하면?

① 12

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

$$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$$

$$6 \geq \sqrt{6ab}, 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$$



5. 실수  $x, y$ 가  $x^2 + y^2 = 1$ 을 만족할 때, 곱  $xy$ 의 최댓값을 구하면?

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{1}{2}$       ④  $\sqrt{2}$       ⑤  $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}$  이고

$\sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy|$  이므로  $|xy| \leq \frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$

그러므로  $xy$ 의 최댓값은  $\frac{1}{2}$  이다.

6. 양수  $a, b$ 에 대하여  $\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

- ① 0                      ② 1                      ③ 2                      ④ 3                      ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} &= \frac{1}{6} \left( \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \\ &\geq \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2\end{aligned}$$

해설

7.  $x > 0, y > 0$  일 때,  $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$  의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

8.  $a, b$ 가 양수일 때,  $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

$a, b$ 가 양수이므로,  $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$



9. 양수  $a, b$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는  $a^2 = b^2$  일 때 성립)

그런데  $a^2 + b^2 = 1$  이므로  $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는  $a^2 = b^2$  일 때 성립)

따라서  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

10. 방정식  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수  $x, y$ 에 대하여  $xy$ 의 최솟값은?

① 16      ② 17      ③ 18      ④ 19      ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서  $xy \geq 16$  이므로  $xy$ 의 최솟값은 16

11. 실수  $x, y$ 에 대하여  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때,  $x + y$ 의 최댓값은?

①  $\sqrt{7}$

② 3

③  $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$  이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은  $\sqrt{13}$

12.  $a, b, x, y$ 가 실수이고,  $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때  $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16      ② -4      ③ 0      ④ 4      ⑤ 16

해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$   
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$   
(최댓값)  $\times$  (최솟값) = -16



13. 실수  $a, b, x, y$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중  $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

①  $-1$       ②  $0$       ③  $2$       ④  $3$       ⑤  $4$

해설

$a, b, x, y$ 가 실수이므로  
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$   
 $5 \times 3 \geq (ax + by)^2$   
 $\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$   
따라서 4는  $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

14.  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고  $a + b + c = 14$ 일 때,  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여  
 $(1^2 + 2^2 + 3^2)(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{c}^2)$   
 $\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$   
 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$   
 $\leq 14(a + b + c) = 14^2$   
 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로  
 $\therefore 0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$   
따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

15. 실수  $x, y$ 에 대하여  $3x + 4y = 5$  일 때,  $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 6                      ⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해  
 $(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$   
 $25(x^2 + y^2) \geq 25$   
 $\therefore x^2 + y^2 \geq 1$

해설

$3x + 4y = 5$ 에서  
 $y = \frac{1}{4}(5 - 3x)$   
 $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{16}(3x - 5)^2$   
 $= x^2 + \frac{1}{16}(9x^2 - 30x + 25)$   
 $= \frac{25}{16}x^2 - \frac{30}{16}x + \frac{25}{16}$   
 $= \frac{25}{16}\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \frac{25}{16}$   
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$   
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 1$

16. 실수  $a, b, x, y$ 에 대하여  $a^2 + b^2 = 1$ 이고  $x^2 + y^2 = 2$ 이 성립할 때,  $ax + by$ 의 최댓값은?

① 1

②  $\sqrt{2}$

③  $\sqrt{3}$

④ 2

⑤  $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에 주어진 값

$a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 2$ 을 대입하면

$1 \times 2 \geq (ax + by)^2$ 이다.

따라서  $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$

$\therefore ax + by$ 의 최댓값은

$\sqrt{2}$ 이다.



17.  $a, b, c$ 가 실수이고  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때  $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각  $M, m$ 이라 할 때,  $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2\} (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + \sqrt{2}c)^2$$

$$\therefore (a + b + \sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$$

$$\therefore -4 \leq a + b + \sqrt{2}c \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$$\therefore M = 4, m = -4$$

$$M - m = 8$$

18. 제곱의 합이 일정한 두 실수  $x, y$ 에 대하여  $2x + 3y$ 의 값이 최대일 때,  $x$ 와  $y$ 사이의 관계는?

①  $x = y$

②  $2x = 3y$

③  $3x = 2y$

④  $x = y^2$

⑤  $x^2 = y^2$

해설

$$x^2 + y^2 = k \text{라 하면}$$

$$(x^2 + y^2)(2^2 + 3^2) \geq (2x + 3y)^2$$

( $\therefore$  코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

$$\therefore 13k \geq (2x + 3y)^2$$

$$\therefore -\sqrt{13k} \leq 2x + 3y \leq \sqrt{13k}$$

이 때, 등호는  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$  일 때 성립하므로

$$3x = 2y$$

19.  $a > 0, b > 0, c > 0$  일 때  
 $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$  이므로

$$\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{b} > 0, \frac{a}{c} > 0$$

$$1 + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{1 \times \frac{b}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$1 + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad 1 + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}} = 8$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \geq 8$$

따라서 최솟값은 8

20.  $x > -1$  일 때  $x + \frac{1}{x+1}$  의 최솟값을  $m$ , 그 때의  $x$  의 값을  $k$  라 할 때  $m+k$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x+1 > 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq$$

$$2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

$$\therefore m = 1$$

이 때 등호는

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \text{ 에서 } x = 0, -2$$

$x > -1$  이므로 등호는  $x = 0$  일 때만 성립한다.

$$\therefore k = 0$$

$$\therefore m+k = 1$$



21.  $a^2 + b^2 = 2$ ,  $x^2 + y^2 = 2$ 일 때,  $ax + by$ 의 최댓값과  $ab + xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

i)  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\therefore -2 \leq ax + by \leq 2$

ii)  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}, \quad 1 \geq |ab|$

$\therefore -1 \leq ab \leq 1$

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}, \quad 1 \geq |xy|$

$\therefore -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore -2 \leq ab + xy \leq 2$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

22.  $x > 2$  일 때,  $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$  의 최솟값을  $a$ , 그 때의  $x$  의 값을  $b$  라 할 때,  $a + 2b$  의 값을 구하면?

①  $5 + \sqrt{2}$

②  $5 + 2\sqrt{2}$

③  $5 + 3\sqrt{2}$

④  $5 + 4\sqrt{2}$

⑤  $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

23. 다음은 양수  $x, y, z$ 가  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족할 때,  $P = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \therefore P^2 &\geq (\text{가}) \end{aligned}$$

따라서,  $P$ 의 최솟값은 (나) 이고,  
등호는  $x = y = z =$  (다) 일 때, 성립한다.

위

의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

- ①  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$
- ②  $9, 3, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ③  $3, \sqrt{3}, \frac{1}{3}$
- ④  $3, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
- ⑤  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \\ \text{조건에서 } x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \text{ 이므로} \\ P^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \right) + 2 \\ &\geq \sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2x^2}{y^2}} + \sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{z^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2 = (3) \end{aligned}$$

$\therefore P \geq \sqrt{3}$  이므로  $P$ 의 최솟값은 ( $\sqrt{3}$ ) 이고,

등호는  $x = y = z = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  일 때 성립한다.

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1$  이므로  $x = y = z$  이면  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  이다.

$\therefore$  (가) 3 (나)  $\sqrt{3}$  (다)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

24. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 이  $x$  축,  $y$  축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때,  $\triangle OBC$  의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6                      ② 8                      ③ 10                      ④ 12                      ⑤  $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$  의 넓이를  $S$  라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$     A(3, 2)

는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면  $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서  $\triangle OBC$  의 넓이의 최솟값은 12 이다.



25.  $a, b$ 는 양의 상수이다.  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, x > 0, y > 0$ 일 때,  $x + y$ 의  
최솟값은?

①  $2\sqrt{ab}$

②  $4\sqrt{ab}$

③  $a + b + 2\sqrt{ab}$

④  $a + b + 4\sqrt{ab}$

⑤  $ab + 3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균)  $\geq$  (기하평균) 이므로

$$(x+y) \cdot 1 = (x+y) \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right)$$

$$= a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq a + b + 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}}$$

$$= a + b + 2\sqrt{ab}$$

26. 실수  $x, y, z, t$ 가  $x + y + z + t = 6$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 12$ 를 만족할 때,  $xy + yz + zx$ 의 최대값과 최소값의 차는?
- ① 3                      ② 9                      ③ 12
- ④  $10 + 24\sqrt{3}$                       ⑤  $21 + 12\sqrt{3}$

해설

$x + y + z + t = 6$ 에서  $x + y + z = 6 - t$   
 $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 12$ 에서  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 12 - t^2$   
 $(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ 이므로  
코시-슈바르츠 부등식  $3(12 - t^2) \geq (6 - t)^2$ 에서  
 $0 \leq t \leq 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$   
 $xy + yz + zx$   
 $= \frac{1}{2} \{ (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \}$   
 $= \frac{1}{2} \{ (6 - t)^2 - (12 - t^2) \}$   
 $= t^2 - 6t + 12 = (t - 3)^2 + 3$   
 $\textcircled{1}$ 에서  $xy + yz + zx$ 는  
 $t = 0$ 일 때 최대값 12,  
 $t = 3$ 일 때 최소값 3을 갖는다.  
따라서, 최대값과 최소값의 차는  $12 - 3 = 9$

27. 실수  $x, y, z$ 에 대하여  $x + 2y + z = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 가 성립할 때,  $x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{5}$       ⑤  $\frac{1}{6}$

해설

$$\begin{aligned}x + 2y + z = 1 &\Rightarrow 2y + z = 1 - x \\x^2 + y^2 + z^2 = 2 &\Rightarrow y^2 + z^2 = 2 - x^2 \\(2^2 + 1^2)(y^2 + z^2) &\geq (2y + z)^2 \\(\because \text{코시-슈바르츠 부등식}) \\5(2 - x^2) &\geq (1 - x)^2 \\6x^2 - 2x - 9 &\leq 0 \\\frac{1 - \sqrt{55}}{6} \leq x &\leq \frac{1 + \sqrt{55}}{6} \\\therefore \text{최댓값} + \text{최솟값} &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$