1. $x > 0,\ y > 0$ 일 때, $(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$= 13 + \frac{12y}{x} + \frac{3x}{y}$$

$$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{12y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}$$

$$= 13 + 12 = 25$$

$$\therefore (3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 25$$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x} = \frac{3x}{y}$, 즉 $x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25 이다.

2. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0,\ b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9 이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

3. $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right) = 8xy + \frac{1}{2xy} + 5$$

$$\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5$$

$$= 4 + 5 = 9$$

4. $2a + 3b = 12$를 만족하는 양수 $a,\ b$에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

$12 = 2a + 3b \geq 2\sqrt{6ab}$

$6 \geq \sqrt{6ab},\ 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$

5. 실수 x, y가 $x^2 + y^2 = 1$을 만족할 때, 곱 xy의 최댓값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$x^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2}$ 이고

$\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |xy|$ 이므로 $|xy| \leq \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2} \leq xy \leq \dfrac{1}{2}$

그러므로 xy의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

6. 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} = \frac{1}{6}\left(\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2$$

해설

7. $x > 0, y > 0$일 때, $\left(3x + \dfrac{2}{y}\right)\left(y + \dfrac{6}{x}\right)$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20 + 3 \times 4 = 32$

8. a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$$

a, b가 양수이므로, $ab>0$

$$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$$

$$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$$

9. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2>$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a^2}>0$, $\frac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$

$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

10. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$

따라서 $xy \geq 16$이므로 xy의 최솟값은 16

11. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \ge (x+y)^2$$

$13 \ge (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \le x+y \le \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

12. a, b, x y가 실수이고, $a^2+b^2=8, x^2+y^2=2$일 때 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$=-16$

13. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5\times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

14. $a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0$이고 $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값은?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2+3^2)(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2+\sqrt{c}^2)$

$\ge(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$

$\le 14(a+b+c)=14^2$

$a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0$이므로

$\therefore\ 0 \le \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \le 14$

따라서, 구하는 최댓값은 14이다.

15. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 6　　⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore\ x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$y=\dfrac{1}{4}(5-3x)$

$x^2+y^2=x^2+\dfrac{1}{16}(3x-5)^2$

$=x^2+\dfrac{1}{16}(9x^2-30x+25)$

$=\dfrac{25}{16}x^2-\dfrac{30}{16}x+\dfrac{25}{16}$

$=\dfrac{25}{16}\left(x^2-\dfrac{6}{5}x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right)+\dfrac{25}{16}$

$=\dfrac{25}{16}\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{9}{16}+\dfrac{25}{16}$

$=\dfrac{25}{16}\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2+1$

16. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$이고 $x^2 + y^2 = 2$이 성립할 때, $ax + by$의 최댓값은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$에 주어진 값

$a^2 + b^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 2$을 대입하면

$1 \times 2 \geq (ax + by)^2$이다.

따라서 $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$

$\therefore ax + by$의 최댓값은

$\sqrt{2}$이다.

17. a, b, c가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=4$일 때 $a+b+\sqrt{2}c$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\left\{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2\right\}(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+\sqrt{2}c)^2$$

$\therefore \ (a+b+\sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$

$\therefore \ -4 \leq a+b+\sqrt{2}c \leq 4$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$\therefore \ M=4, \ m=-4$

$M-m=8$

18. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y에 대하여 $2x+3y$의 값이 최대일 때, x와 y사이의 관계는?

① $x=y$ ② $2x=3y$ ③ $3x=2y$

④ $x=y^2$ ⑤ $x^2=y^2$

해설

$x^2+y^2=k$라 하면

$(x^2+y^2)(2^2+3^2) \geq (2x+3y)^2$

($\because$코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

$\therefore 13k \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13k} \leq 2x+3y \leq \sqrt{13k}$

이 때, 등호는 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$일 때 성립하므로

$3x=2y$

19. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때

$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{b}>0,\ \frac{a}{c}>0$

$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}},\ 1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$

$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}}=8$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8$

따라서 최솟값은 8

20. $x > -1$일 때 $x + \frac{1}{x+1}$의 최솟값을 m, 그 때의 x의 값을 k라 할 때 $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x+1>0$이므로 $x+\frac{1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-1 \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}}-1=1$

$\therefore m=1$

이 때 등호는

$x+1=\frac{1}{x+1}$에서 $x=0,-2$

$x>-1$이므로 등호는 $x=0$일 때만 성립한다.

$\therefore \ k=0$

$\therefore \ m+k=1$

21. $a^2+b^2=2,\ x^2+y^2=2$일 때, $ax+by$의 최댓값과 $ab+xy$의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

i) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

$\therefore\ -2 \leq ax+by \leq 2$

ii) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2},\quad 1 \geq |ab|$

$\therefore\ -1 \leq ab \leq 1$

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2},\quad 1 \geq |xy|$

$\therefore\ -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore\ -2 \leq ab+xy \leq 2$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

22. $x > 2$ 일 때, $2x-3+\dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a, 그 때의 x의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① $5+\sqrt{2}$　　② $5+2\sqrt{2}$　　③ $5+3\sqrt{2}$

④ $5+4\sqrt{2}$　　⑤ $5+6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$2x-3+\frac{1}{x-2}=2(x-2)+\frac{1}{x-2}+1$$

$$\geq 2\sqrt{2(x-2)\times\frac{1}{x-2}}+1$$

$$\geq 2\sqrt{2}+1$$

$\therefore a=2\sqrt{2}+1$

$2(x-2)=\dfrac{1}{x-2}$ 에서

$2(x-2)^2=1,\ (x-2)^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x>2$ 이므로 $b=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a+2b=2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+4=5+3\sqrt{2}$

23. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$$
$\therefore P^2\geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다) 에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$$

조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로

$$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$$
$$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}$$
$$+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$$

$\therefore$ $P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P 의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,

등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.

$\because$ $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

24. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, △OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

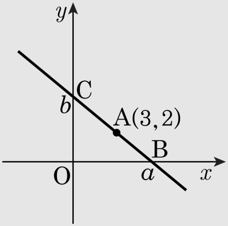
① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

△OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A(3, 2) 는

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$　　$\therefore S\geq 12$

따라서 △OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

25. a, b는 양의 상수이다. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, $x>0$, $y>0$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① $2\sqrt{ab}$　　② $4\sqrt{ab}$　　③ $a+b+2\sqrt{ab}$

④ $a+b+4\sqrt{ab}$　　⑤ $ab+3\sqrt{ab}$

해설

(산술평균)≥ (기하평균)이므로

$(x+y)\cdot 1=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$

$=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geq a+b+2\sqrt{\frac{ay}{x}\cdot\frac{bx}{y}}$

$=a+b+2\sqrt{ab}$

26. 실수 $x,\ y,\ z,\ t$가 $x+y+z+t=6,\ x^2+y^2+z^2+t^2=12$를 만족할 때, $xy+yz+zx$의 최대값과 최소값의 차는?

① 3　　② 9　　③ 12

④ $10+24\sqrt{3}$　　⑤ $21+12\sqrt{3}$

해설

$x+y+z+t=6$에서 $x+y+z=6-t$

$x^2+y^2+z^2+t^2=12$에서

$x^2+y^2+z^2=12-t^2$

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$이므로

코시-슈바르츠 부등식 $3(12-t^2) \geq (6-t)^2$에서

$0 \leq t \leq 3 \cdots\cdots$ ㉠

$xy+yz+zx$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(6-t)^2-(12-t^2)\right\}$

$=t^2-6t+12=(t-3)^2+3$

㉠에서 $xy+yz+zx$는

$t=0$일 때 최대값 12,

$t=3$일 때 최소값 3을 갖는다.

따라서, 최대값과 최소값의 차는 $12-3=9$

27. 실수 x, y, z에 대하여 $x+2y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=2$가 성립할 때, x의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x+2y+z=1 \Rightarrow 2y+z=1-x$

$x^2+y^2+z^2=2 \Rightarrow y^2+z^2=2-x^2$

$(2^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (2y+z)^2$

($\because$ 코시-슈바르츠 부등식)

$5(2-x^2) \geq (1-x)^2$

$6x^2-2x-9 \leq 0$

$$\frac{1-\sqrt{55}}{6} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{55}}{6}$$

$\therefore$ 최댓값 $+$ 최솟값 $=\frac{1}{3}$