

1. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

$$\begin{aligned}\text{i) } A - B &= (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2) \\ &= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0 \\ \therefore A &> B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } B - C &= (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1) \\ &= 1 - \sqrt{3} < 0 \\ \therefore B &< C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii) } C - A &= (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0 \\ \therefore C &> A\end{aligned}$$

따라서 $B < A < C$

2. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

3. $a > b > 0$ 일 때, 다음 $2a + b$, $a + 2b$ 의 대소를 비교하면?

① $2a + b < a + 2b$

② $2a + b \leq a + 2b$

③ $2a + b > a + 2b$

④ $2a + b \geq a + 2b$

⑤ $2a + b = a + 2b$

해설

$$(2a + b) - (a + 2b) = a - b > 0$$

$$\therefore 2a + b > a + 2b$$

4. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

5. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

6. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

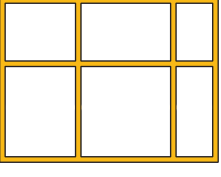
산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

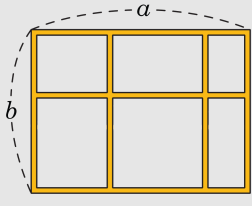
따라서 최솟값은 17

7. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40) ② (1200, 40) ③ (600, 30)
④ (1200, 30) ⑤ (450, 60)

해설



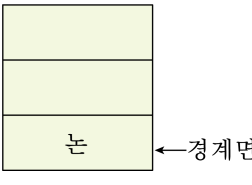
$$\begin{aligned} 3a + 4b &= 240 \\ 3a + 4b &\geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b} \\ 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} &\geq \sqrt{ab} (\because 3a + 4b = 240) \\ \therefore 1200 &\geq ab \\ \text{단, 등호는 } 3a &= 4b \text{ 일 때 성립하므로,} \\ 3a + 4b &= 6a = 240, \\ \therefore a &= 40 \end{aligned}$$

8. 길이가 10인 쇠파이프를 n 등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x 인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?
- ① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원
④ 9000원 ⑤ 10000원

해설

$$\begin{aligned} \text{쇠파이프 한 개의 길이} &: \frac{10}{n} \\ (\text{총 비용}) &= 250 \left(\frac{10}{n} \right)^2 \times n + 1000(n-1) \\ &= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000 \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000 \\ &= 2 \times 5000 - 1000 \\ &= 10000 - 1000 = 9000 \end{aligned}$$

9. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m^2 인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원
 ④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x 라 하면

가로의 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

10. a, b, x, y 가 실수이고 $a^2 + b^2 = 2, x^2 + y^2 = 8$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ -5

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$\text{즉, } (ax + by)^2 \leq 2 \times 8$$

한편, $ax + by = X$ 라 하면, $X^2 \leq 16$

$$\therefore -4 \leq X \leq 4$$

따라서, $M = 4, m = -4$

$$\therefore M + m = 0$$

11. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 를 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + 3z$ 의 최대값을 구하면?

① 14 ② 17 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$$

$$14 \cdot 2 \geq (x + 2y + 3z)^2$$

$$-2\sqrt{7} \leq x + 2y + 3z \leq 2\sqrt{7}$$

$\therefore$ 구하는 최대값은 $2\sqrt{7}$

12. $a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 일 때, $ax + by$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 ?

① $-4 \leq ax + by \leq 4$

② $-9 \leq ax + by \leq 9$

③ $-6 \leq ax + by \leq 6$

④ $0 \leq ax + by \leq 36$

⑤ $-36 \leq ax + by \leq 36$

해설

$a^2 + b^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ 이면
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에서
 $4 \cdot 9 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -6 \leq ax + by \leq 6$

13. 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \frac{2xy}{x+y}$ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $G \geq A \geq H$ ② $A \geq H \geq G$ ③ $A \geq G \geq H$
 ④ $H \geq G \geq A$ ⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \Leftrightarrow & \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \\ \therefore & A \geq G \cdots \textcircled{1} \\ & (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy \\ \Leftrightarrow & \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y} \\ \therefore & G \geq H \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } & A \geq G \geq H \end{aligned}$$

14. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H 에 대하여
적당한 실수 r 가 존재하여
 $a = H + \frac{a}{r}, H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$ 가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$ 이고 $\frac{a-H}{a} = \frac{b-H}{b} \cdots (B)$ 이므로
 $H = \frac{a+b}{2}$ 이다.
역으로, $a \neq b$ 인 양수 a, b 에 대하여
 $H = \frac{a+b}{2}$ 이면,
식 (B) 가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$ 이다.
 (B) 에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{b-H}{b}$ 이라 놓으면
식 (A) 가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H 에 대하여 적당한 실수 r 이 존재하여
식 (A) 가 성립하기 위한 $(\Leftarrow)$ 조건은
 $a \neq b$ 이고 $H = \frac{a+b}{2}$ 이다.

위의 증명에서 $(\Leftarrow), (\Rightarrow), (\Leftarrow)$ 에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

- ① $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요충분}$
- ② $\frac{H-b}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{필요충분}$
- ③ $\frac{H-b}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{충분}$
- ④ $\frac{b-H}{b}, \frac{2ab}{a+b}, \text{필요}$
- ⑤ $\frac{b-H}{b}, \frac{ab}{a+b}, \text{충분}$

해설

$a = H + \frac{a}{r}$ 에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$
 $H = b + \frac{b}{r}$ 에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$
 $\therefore \frac{a-H}{a} = \frac{H-b}{b}$
 $ab - bH = aH - ab$ 이므로 $H = \frac{a+b}{2}$
따라서 $(\Leftarrow)$ 필요충분조건

15. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

- I. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$
II. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
III. $a + \frac{1}{a} \geq 2$
IV. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
V. $(a+b)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) \geq 4$
VI. $(2a+b)\left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 25$

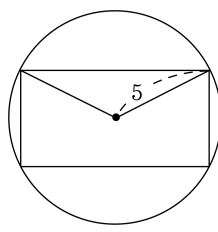
① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- I. $(1+a)^2 - (\sqrt{1+2a})^2$
 $= a^2 > 0 \quad (\because a > 0)$
 $\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a} \quad (\bigcirc)$
II. $(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
 $= 2(a+b) - (a+b+2\sqrt{ab})$
 $= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
 $\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (\bigcirc)$
III. $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \quad (\bigcirc)$
IV. $\frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \frac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$
 $\therefore \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (\bigcirc)$
V. $(a+b)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right) = 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}$
 $\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{2b}{a}} = 4$
 $\therefore 4 + \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 8 \quad (\times)$
VI. $(2a+b)\left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b}\right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a}$
 $\frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{8b}{a}} = 8$
 $\therefore (2a+b)\left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b}\right) = 17 + \frac{2a}{b} + \frac{8b}{a} \geq 25 \quad (\bigcirc)$

16. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

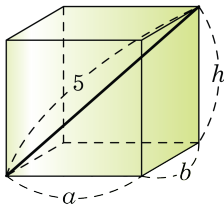
- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
 가로와 길이를 a , 세로의 길이를 b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 100$
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

17. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?

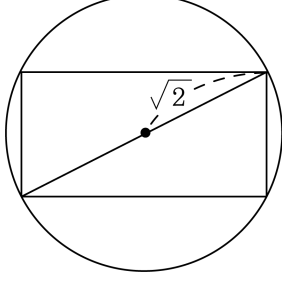


- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

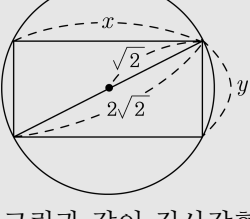
$a^2 + b^2 + h^2 = 25$
 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.
 $(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$
 $\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값
 $: 20\sqrt{3}$

18. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x, y(x > 0, y > 0)$ 라고 하면
 $x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)
 $\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

19. 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

a, b 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에서

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ 이므로

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

20. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

- ㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$
- ㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$
- ㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$
- ㉣ $|a| + |b| > |a + b|$
- ㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉣, ㉠

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

- ㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$
 $\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면
 $a < c$ ($\because b^2 > 0$)
- ㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$
반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림
- ㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$
- ㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0$
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림
- ㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$
 $= \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} \geq 0$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

21. 부등식 $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$ 이 절대부등식이 되기 위한 정수 a 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \leq 0$ 이어야 하므로

$a^2 + 2a + 1 - 4a - 4$

$= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

따라서 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개

22. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

23. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

- ① $a \leq b^2$
- ② $b^2 \leq a$
- ③ $a^2 \leq b$
- ④ $b \leq a^2$
- ⑤ $b \leq 4a^2$

해설

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 에서 양변을 y^2 으로 나누면

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a\left(\frac{x}{y}\right) + b \geq 0$$

모든 실수 x, y 에 대해 성립하려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

24. 다음 중 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하는 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ $-x^2 + 4x - 6 < 0$

㉡ $x^2 - 6x + 9 > 0$

㉢ $x^2 - 2x + 4 \geq 0$

㉤ $a = b < 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

㉥ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b > bx + a$ (단, a, b 는 실수)

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 3개
- ④ 4개
- ⑤ 5개

해설

㉡ $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$

㉥ $a = b \leq 0$ 이고, $ax - b \geq bx + a$

따라서 항상 성립하는 것은 ㉠, ㉡, ㉥ 의 3개이다.

25. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- ㉡ $x^2 + 4x \geq -4$
- ㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$
- ㉣ $x^2 \geq 0$
- ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- ㉠ $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$
 $= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉡ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉢ $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$
 $(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
 - ㉣ $x^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식
 - ㉤ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$
 $= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$
 $\rightarrow$ 절대부등식
- 따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

26. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

27. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

28. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$