1. 다음 (　　　) 안에 알맞은 용어를 써 넣어라.

(1) 함수 $f : X \to X$ 에서 정의역 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 인 함수를 (　　　)라고 한다. (2) 함수 $f : X \to Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 원 소 x 가 Y 의 오직 하나의 원소로 대응할 때, 이 함수를 (　　　)라고 한다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 항등함수

▷ 정답 : 상수함수

해설

2. 집합 $X = \{x | x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100　② 50　③ 38　④ 20　⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
$f(1) = F(3) = \cdots = F(19) = 2$
$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

3. 다음 중 항등함수를 찾으면?

① $f(x)=x$ ② $f(x)=x+1$ ③ $f(x)=x-1$
④ $f(x)=x^2$ ⑤ $f(x)=x^2+1$

해설

항등함수는 $f(x)=x$ 또는 $y=x$ 이다.

4. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$　　② $a > 2$　　③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$　　⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases}$$ 이고

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$는 증가함수이므로
$x < 0$일 때도 $f(x)$는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$\therefore\ a < \frac{1}{2}$

5. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a + b = 3$
$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$
$\therefore\ a + b = 1$

6. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이려면,

(정의역)=(공역) 이므로

(정의역)=(치역) 이 되어야 한다.

즉, $f(k) = k$

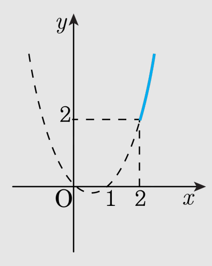
$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$

(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로

$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.

(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.

$\therefore\ k = 2$



7. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n\text{이 2의 배수일 때}) \\ n+1 & (n\text{이 2의 배수가 아닐 때}) \end{cases}$$ 로 정의하자.

$f = f^1,\ f \circ f = f^2,\ f \circ f^2 = f^3,\ \cdots,\ f \circ f^n = f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10) = 2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면
$f(10) = 5$
$f^2(10) = f(f(10)) = f(5) = 6$
$f^3(10) = f(f^2(10)) = f(6) = 3$
$f^4(10) = f(f^3(10)) = f(3) = 4$
$f^5(10) = f(f^4(10)) = f(4) = 2$
따라서 k 의 최솟값은 5 이다.

8. 임의의 양수 x, y에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 0$　　② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$　　④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore\ f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y)$($\because$ ④가참)

9. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

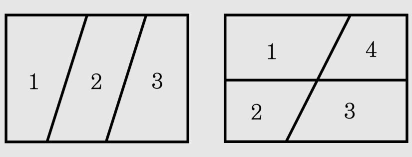
㉠ $f(2)=3$, $g(2)=4$ 이다.

㉡ 모든 n 에 대하여 $f(n)=n+1$ 이다.

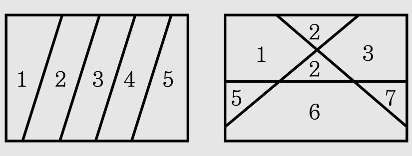
㉢ 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n+1)$ 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 

위의 그림에서 $f(2)=3$, $g(2)=4$ 이다. (참)

㉡ 

한 평면에서 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나뉘어진 영역의 수가 최소가 되는 것은 n 개의 직선이 평행일 때이다.
즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $\cdots$ 이므로 $f(n)=n+1$ (참)
㉢ [반례] $f(4)=5$, $g(3)=7$ 이므로 $g(3)>f(4)$ 이다.(거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

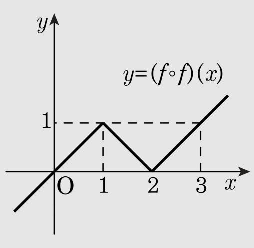
10. $0 \leq x \leq 2$에서 함수 $f(x) =|x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

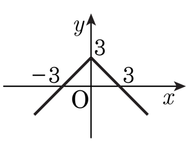
해설

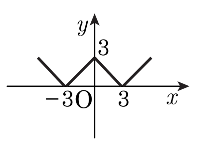
방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) =|x-1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) =||x-1|-1|$
따라서 $0 \leq x \leq 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.

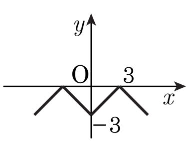


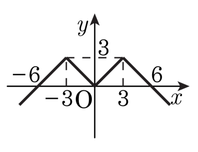
그런데, $b \neq 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1$, $b = 2$이므로 $ab = -2$

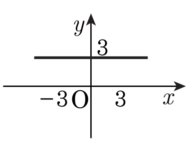
11. $f(x)=3-|x|$, $g(x)=|x|-3$ 일 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프는?

①


②


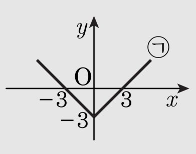
③


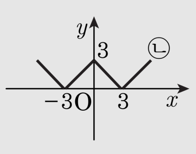
④


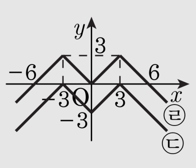
⑤


해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3-||x|-3|$ 이므로
$y=|x|-3$ 의 그래프는 ㉠
$y=||x|-3|$ 의 그래프는 ㉡

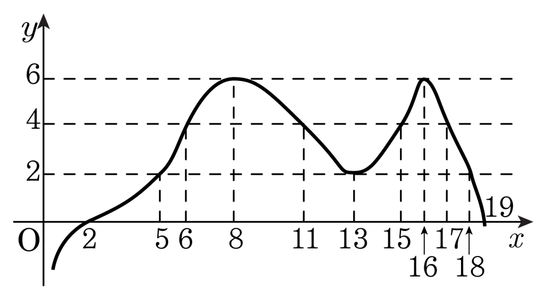






$y=-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉢
$y=3-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉣

12. 아래 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. x에 관한 방정식 $f(f(x+2)) = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면? (단, $x < 2$ 또는 $x > 19$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)

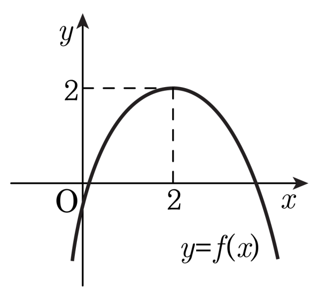


① 2, 20　② 2, 22　③ 3, 30　④ 4, 42　⑤ 4, 50

해설

$f(f(x+2)) = 4$ 에서 $f(x+2) = a$ 로 놓으면
$f(a) = 4, y = f(x)$ 와 $y = 4$ 가 만나는 점의 x좌표가 a값 이므로
$a = 6, 11, 15, 17$
그런데 $f(x+2) \le 6$ 이므로 $a \le 6$
$\therefore a = 6$
$f(x+2) = 6,\ x+2 = 8, 16$
$\therefore x = 6, 14$
$\therefore x$값은 2개. 합은 $6 + 14 = 20$

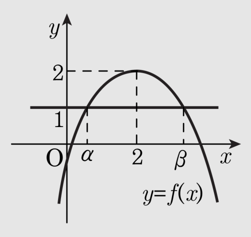
13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

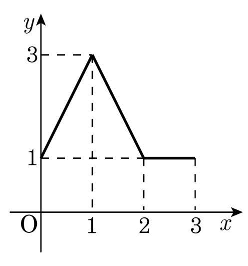
해설

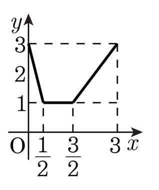
$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.

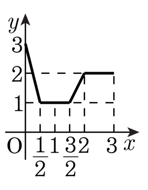


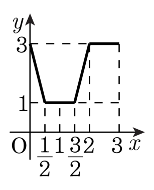
따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

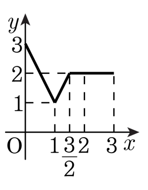
14. 함수
$y=f(x)\,(0\le x\le 3)$의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(f\circ f)(x)\,(0\le x\le 3)$의 그래프는 무엇인가?

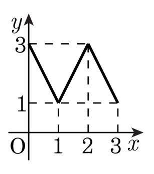


①


②


③


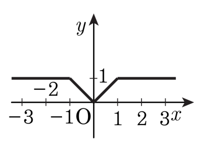
④


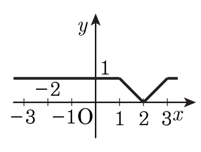
⑤


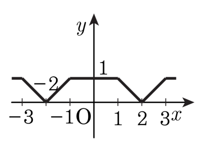
해설

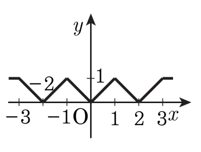
$0\le x\le 2$ 에서 $y=f(x)$의 그래프가
$x=1$에 대하여 대칭이므로
$y=(f\circ f)(x)$의 그래프도
$0\le x\le 2$에서 $x=1$에 대하여 대칭이다.
$y=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서
$f(f(0))=f(1)=3$
$f(f(1))=f(3)=1$
$f(f(2))=f(1)=3$
$f(f(3))=f(1)=3$
따라서, $y=(f\circ f)(x)$를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

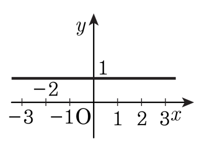
15. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$g(x) = x - 2$ 에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$