

1. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$

㉡ $3^{200} > 6^{150}$

㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{3^{40}}{2^{60}} = \frac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{20} > 1$

$\therefore 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\frac{3^{200}}{6^{150}} = \frac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \frac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{50} < 1$

$\therefore 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\frac{5^{10}}{2^{30}} = \frac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore 5^{10} < 2^{30}$

$\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore 2^{30} < 3^{20}$

$\therefore 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

2. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

3. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

4. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\text{㉠}) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ① $|ab|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$
② $|ab|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$
③ $|ab|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$
④ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$
⑤ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

5. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다.

증명과정에서 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
- ② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
- ③ $|a|^2 = a^2$
- ④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
- ⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

6. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- $\textcircled{\tiny \ominus} \quad |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad |x + y| \geq |x - y|$
- $\textcircled{\tiny \omin�} \quad |x - y| \geq |x| - |y|$

- $\textcircled{1} \quad \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{2} \quad \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{3} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{4} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{5} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

해설

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad (\text{반례}) \quad x = 1, y = -1 \text{ 일 때}$
 $|1 + (-1)| = 0, \quad |1 - (-1)| = 2 \text{ 이므로}$
 $|x + y| < |x - y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad |x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$ 이다.

7. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ a ^2 = a^2$	㉡ $ ab \geq ab$
㉢ $ a + b \geq a - b $	㉣ $ a - b \geq a - b $

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} \text{㉣ } & (|a| - |b|)^2 - |a - b|^2 \\ &= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2 \\ &= 2(ab - |ab|) \leq 0 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

8. $x > 2$ 일 때 $4x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$x-2=t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고 $x=t+2$

따라서 주어진 식을 t 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\&= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\&\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\&= 12\end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립)

9. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & (a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right) \\ &= 5 - \left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \leq 5 - 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 1 \end{aligned}$$

10. 양수 a, b 가 $a + b = 1$ 을 만족할 때, $\frac{a^2+1}{a} + \frac{b^2+1}{b}$ 의 최솟값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} & a > 0, b > 0 \text{ 이고, } a + b = 1 \text{ 이므로,} \\ & \frac{a^2+1}{a} + \frac{b^2+1}{b} = \frac{(a^2b+ab^2)+(a+b)}{ab} \\ & = \frac{ab(a+b)+(a+b)}{ab} = \frac{ab(a+b)}{ab} + \frac{a+b}{ab} \\ & = (a+b) + \frac{a+b}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} \\ & \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ 에서 } \frac{1}{2} \geq \sqrt{ab} (\because a+b=1) \\ & \therefore \frac{1}{ab} \geq 4 \\ & \therefore \frac{a^2+1}{a} + \frac{b^2+1}{b} = 1 + \frac{1}{ab} \geq 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

11. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

12. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

13. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

14. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \\ 3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

15. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

16. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3 \sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

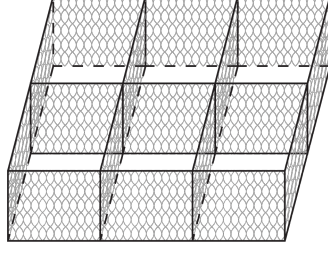
그런데 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 이므로 $lmn = pqr$ 이다.

따라서, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$

(단, 등호는 $l = p, m = q, n = r$ 일 때 성립)

$\therefore$ 구하는 최소값은 3

17. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?

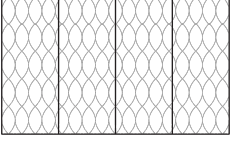


- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면
 $152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$ 이고
등호가 성립할 때, xy 가 최대가 된다.
 $3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로
 $6x = 152$
즉, $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

18. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 60m²
- ② 70m²
- ③ 80m²
- ④ 90m²
- ⑤ 100m²

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

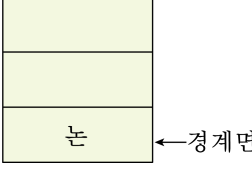
$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 90(m²)

19. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m²인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원
 ④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x 라 하면
 가로 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로
 총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

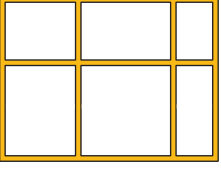
$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

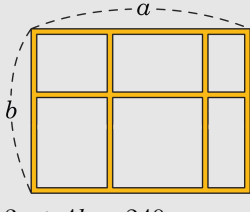
$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$
 $\therefore$ 최소비용은 72만 원

20. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로와 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40) ② (1200, 40) ③ (600, 30)
④ (1200, 30) ⑤ (450, 60)

해설



$$\begin{aligned} 3a + 4b &= 240 \\ 3a + 4b &\geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b} \\ 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} &\geq \sqrt{ab} (\because 3a + 4b = 240) \\ \therefore 1200 &\geq ab \\ \text{단, 등호는 } 3a &= 4b \text{ 일 때 성립하므로,} \\ 3a + 4b &= 6a = 240, \\ \therefore a &= 40 \end{aligned}$$

21. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x+y) = 16 \quad x+y = 8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\text{m}^2)$

22. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

$$\text{둘레의 길이는 } 5 + 5\sqrt{2}$$

23. 네 실수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$ 가 성립할 때, 실수 d 의 최솟값 m 과 최댓값 M 의 합 $m+M$ 의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$a+b+c+d=8, a^2+b^2+c^2+d^2=124$
 $a+b+c=8-d, a^2+b^2+c^2=124-d^2$
코시-슈바르츠 부등식에서
 $(1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ 이므로
 $3(124-d^2) \geq (8-d)^2$
 $372-3d^2 \geq d^2-16d+64$
 $4d^2-16d+64-372 \leq 0$
 $4d^2-16d-308 = d^2-4d-77 \leq 0$
 $\therefore (d-11)(d+7) \leq 0$
 $\therefore -7 \leq d \leq 11$
따라서 최솟값 $m = -7$, 최댓값 $M = 11$
이므로 $m+M = -7+11 = 4$

24. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2\}$
 $= 2(x + 3y)$
 $= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

25. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

해설

$\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\}(1 + 4 + 9)$
 $\geq (\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2$ 이므로
 $(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z})^2 \leq 140$
 $\therefore 0 < \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} \leq \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$
($\because x > 0, y > 0, z > 0$)
 $\therefore \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값은
 $2\sqrt{35}$

26. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

27. 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

a, b 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에서

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ 이므로

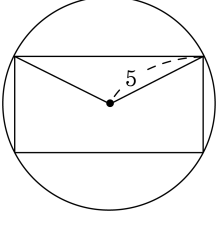
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은 2이다.

28. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
 가로와 길이를 a , 세로의 길이를 b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 100$
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

29. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3([가])$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $([나])$ 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$
- ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
- ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$
- ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
- ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

30. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다.㉣

- ① ㉠

② ㉡
- ③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$
즉 $y = 4x$ 일 때이고,
㉡에서 등호가 성립하는 경우는
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.

31. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [\text{㉑}] - [\text{㉒}] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [\text{㉓}] \end{aligned}$$

따라서, $[\text{㉑}] \geq [\text{㉒}]$
한편, 등호는 $[\text{㉓}]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉑, ㉒, ㉓, ㉔에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ①

㉑

$a+b$

㉒

$\sqrt{ab}$

㉓

≥ 0

㉔

$a=0, b=0$
- ②

㉑

$\frac{a+b}{2}$

㉒

$2\sqrt{ab}$

㉓

≤ 0

㉔

$a=0, b=0$
- ③

㉑

$\frac{a+b}{2}$

㉒

$\sqrt{ab}$

㉓

≥ 0

㉔

$a=b$
- ④

㉑

$\sqrt{ab}$

㉒

$a+b$

㉓

≥ 0

㉔

$a=b$
- ⑤

㉑

$2\sqrt{ab}$

㉒

$\frac{a+b}{2}$

㉓

≤ 0

㉔

$a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

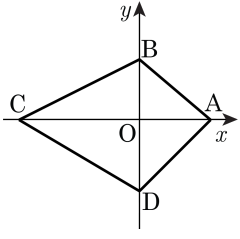
32. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

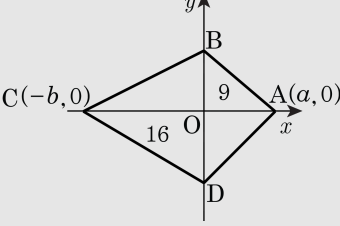
$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= x^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1 \\ &= (x^2 - x + 1)^2 + 1 \\ \therefore \text{준식} &= \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \text{이고} \\ x^2 - x + 1 &= \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{이므로} \\ x^2 - x + 1 = t \text{로 치환 } t &\geq \frac{3}{4} \text{하면} \\ \text{준식} : \frac{t}{t^2 + 1} &= \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \\ \text{여기서 } t + \frac{1}{t} &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \\ (\because t &\geq \frac{3}{4}) \\ \text{따라서 } \frac{t^{-1} + 1}{t} \text{의 최솟값은 } 2 \text{이고} \\ \frac{t}{t^2 + 1} \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2} \text{이다.} \end{aligned}$$

33. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,
 $C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)
 ($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

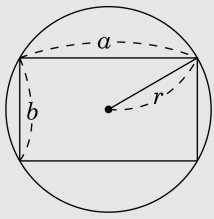
$a > 0, b > 0$ 이므로,
 산술기하평균을 이용하면,

$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

34. 반지름이 $r(\text{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① $2r(\text{cm}^2)$
- ② $r^2(\text{cm}^2)$
- ③ $2r^2(\text{cm}^2)$
- ④ $\sqrt{2}r^2(\text{cm}^2)$
- ⑤ $\frac{r^2}{2}(\text{cm}^2)$

해설



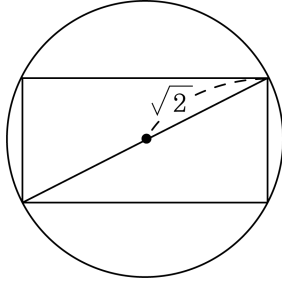
$$a^2 + b^2 = (2r)^2$$

산술기하평균의 관계에 의해

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$$
$$4r^2 \geq 2(ab)$$
$$ab \leq 2r^2,$$

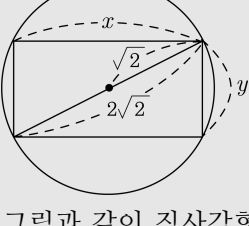
(직사각형 넓이의 최댓값) $= 2r^2$

35. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x, y(x > 0, y > 0)$ 라고 하면
 $x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)
 $\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

36. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을
 $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 8$ 이라 하면
 $\angle C$ 가 직각인 직각삼각형이므로
 $\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$
 $\therefore 24 = \frac{1}{2} \times x_1 \times 6 + \frac{1}{2} \times x_2 \times 8 + \frac{1}{2} \times x_3 \times 10$ 이므로
 $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 24$
코시-슈바르츠 부등식에서
 $(3^2 + 4^2 + 5^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2$
 $\therefore 50 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq 576$
 $\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$
따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

37. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

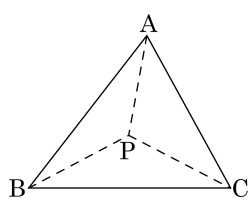
① $\frac{a^2}{3}$

② a^2

③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$

⑤ $3\sqrt{3}a^2$



해설

$$S_1 + S_2 + S_3 = a$$

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

38. 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=1$ 일 때 $ab+bc+ca$ 의 최댓값은?

① 1

② $\sqrt{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{9}$

⑤ $\frac{2}{11}$

해설

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 이므로

$ab + bc + ca$ 의 최댓값은 등호가 성립하는 경우이다.

또 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로

$$a + b + c = 1 \text{에서 } a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \geq ab + bc + ca$$

$\therefore ab + bc + ca$ 의 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

39. a, b, c, d, x, y, z 가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

- ㉠ $a^2 + b^2 \geq ab$
- ㉡ $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$
- ㉢ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$
- ㉤ $|a + b| \leq |a| + |b|$
- ㉥ $|a| - |b| \geq |a - b|$
- ㉦ $|a + b| \geq |a| - |b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉦

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

- ㉠ $a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$
 $= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
 $\therefore a^2 + b^2 \geq ab$: 맞음
- ㉡ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$
 $= a^2 - 2a + b^2 - 2b + 3$
 $= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$
 $\therefore a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$: 틀림
- ㉢ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$
 $= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$
 $+ b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx)$
 $= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$
 $\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$: 틀림
- ㉤ $|a| + |b|$ 의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)
 $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0 (\because |ab| \geq ab)$
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 맞음
- ㉥ $|a| - |b|$ 의 차 비교
 $(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$
 $= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
 $= -2|ab| + 2ab \leq 0 (\because |ab| \geq ab)$
 $\therefore |a| - |b| \leq |a - b|$: 틀림
- ㉦ $|a + b|^2 - (|a| - |b|)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$
 $= 2ab + 2|ab| \geq 0$
 $\therefore |a + b| \geq |a| - |b|$: 맞음

40. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

- ① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$
- ③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$
- ④ $a^2 - 1 > a$
- ⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (등호 성립조건은 } a=b \text{)}$$

$$\textcircled{2} \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$$

$$= a+b+2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \text{ (단 } a=b \text{ 일때 등호성립)}$$

$$\textcircled{3} \quad a^3 + b^3 - ab(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$$

$$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \text{ (등호 성립조건은 } a=b \text{)}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{(반례)} \quad a=1$$

$$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$$

$$\therefore \text{거짓}$$

$$\textcircled{5} \quad a, b, c \text{ 가 모두 양수이므로}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ (등호 성립조건은 } a=b \text{)}$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc} \text{ (등호 성립조건은 } b=c \text{)}$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca} \text{ (등호 성립조건은 } c=a \text{)}$$

$$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

$$\text{(등호 성립조건은 } a=b=c \text{)}$$

41. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k 의 최댓값은?

- ① 2
- ② 5
- ③ 9
- ④ 12
- ⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q) + (q+r) + (r+p)$ 를 곱하면

$$6 + 2 \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq 2k$$
$$3 + \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r 이 양수이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
(좌변)

$$\begin{aligned} &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{q+r}{p+q} \cdot \frac{p+q}{q+r}} + 2 \sqrt{\frac{r+p}{q+r} \cdot \frac{q+r}{r+p}} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{r+p}{p+q} \cdot \frac{p+q}{r+p}} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $p=q=r$ 일 때 성립)
따라서 k 의 최댓값은 9이다.

42. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
 $1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$
 이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
 $ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
 그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$
 곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.
 또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a = b = c = 1$

② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$

④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
 또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서
 $a = b = c = 1$

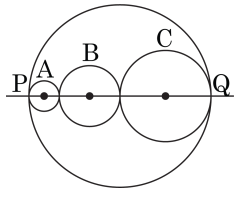
43. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq \sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \\ &= 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

44. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
 ④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
 구의 겹넓이는
 $S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$
 $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
 PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$

45. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$

- ① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$

② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$
- ④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$

⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$

해설

$a + b = 5 - c, \quad a^2 + b^2 = 11 - c^2$ 을
코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2)(1^2 + 1^2) \geq (a + b)^2$ 에 대입하면
 $2(11 - c^2) \geq (5 - c)^2$
 $3c^2 - 10c + 3 \leq 0, (3c - 1)(c - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq c \leq 3$