

1. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$

㉡ $3^{200} > 6^{150}$

㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

2. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

3. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

4. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\
 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\
 &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2 \\
 &\text{그런데 } |a| + |b| \geq 0, \quad |a + b| \geq 0 \text{ 이므로} \\
 &|a| + |b| \geq |a + b| \text{ (단, 등호는 (\quad \text{㉡} \quad), 즉 (\quad \text{㉢} \quad)일 때, 성립)}
 \end{aligned}$$

- ① $|ab| + ab, \quad |ab| = ab, \quad ab \leq 0$
 ② $|ab| + ab, \quad |ab| = -ab, \quad ab \geq 0$
 ③ $|ab| - ab, \quad |ab| = -ab, \quad ab \leq 0$
 ④ $|ab| - ab, \quad |ab| = ab, \quad ab \geq 0$
 ⑤ $|ab| - ab, \quad |ab| = ab, \quad ab \leq 0$

5. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
- ② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
- ③ $|a|^2 = a^2$
- ④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
- ⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

6. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $|x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\text{㉡}}$ $|x + y| \geq |x - y|$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $|x - y| \geq |x| - |y|$

- $\textcircled{1}$ $\textcircled{\text{㉠}}$

$\textcircled{2}$ $\textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{3}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{4}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$

$\textcircled{5}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

7. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

$\text{㉠ } a ^2 = a^2$	$\text{㉡ } ab \geq ab$
$\text{㉢ } a + b \geq a - b $	$\text{㉣ } a - b \geq a - b $

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

8. $x > 2$ 일 때 $4x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

9. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

10. 양수 a, b 가 $a + b = 1$ 을 만족할 때, $\frac{a^2 + 1}{a} + \frac{b^2 + 1}{b}$ 의 최솟값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

11. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

12. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의
최솟값을 구하여라.

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

13. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

14. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

15. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

16. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

① 1

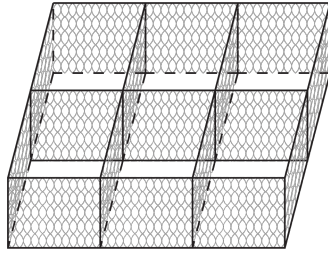
② 2

③ 3

④ 4

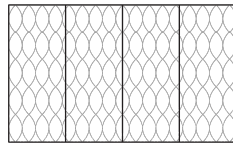
⑤ 5

17. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

18. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 60m^2 ② 70m^2 ③ 80m^2
④ 90m^2 ⑤ 100m^2

19.

한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m²인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)

논

←경계면

① 70만원

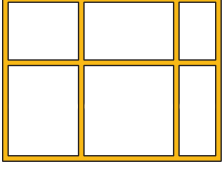
② 71만원

③ 72만원

④ 73만원

⑤ 74만원

20. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40)
- ② (1200, 40)
- ③ (600, 30)
- ④ (1200, 30)
- ⑤ (450, 60)

21. 길이가 16 m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

- ① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

22. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

- 23.** 네 실수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2=124$ 가 성립할 때, 실수 d 의 최솟값 m 과 최댓값 M 의 합 $m+M$ 의 값은?

- ① -7 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

24. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

25. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 이고 $x + y + z = 10$ 일 때, $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

26. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M-m$ 의 값을 구하여라.

 답: _____

27. 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$ 의 최댓값은?

① 1

② 2

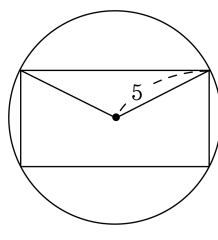
③ 3

④ 4

⑤ 5

28. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에
 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값
 은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



29. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$
- ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
- ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$
- ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
- ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

30. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠} \\ &= \frac{4}{\sqrt{xy}} \\ \therefore \sqrt{xy} &\geq 4 \cdots \textcircled{㉡} \\ \therefore x+y &\geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢} \\ \text{따라서 } x+y \text{의 최솟값은 } 8 \text{이다. } &\cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

- ① ㉠

② ㉡
- ③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

31. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [\text{㉠}] - [\text{㉡}] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [\text{㉢}] \end{aligned}$$

따라서, $[\text{㉠}] \geq [\text{㉡}]$
한편, 등호는 $[\text{㉢}]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① ㉠ $a+b$ ㉡ $\sqrt{ab}$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=0, b=0$

② ㉠ $\frac{a+b}{2}$ ㉡ $2\sqrt{ab}$ ㉢ ≤ 0 ㉣ $a=0, b=0$

③ ㉠ $\frac{a+b}{2}$ ㉡ $\sqrt{ab}$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=b$

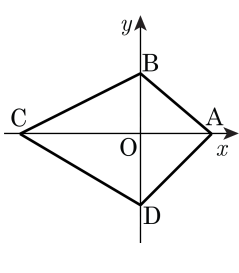
④ ㉠ $\sqrt{ab}$ ㉡ $a+b$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=b$

⑤ ㉠ $2\sqrt{ab}$ ㉡ $\frac{a+b}{2}$ ㉢ ≤ 0 ㉣ $a=0, b=0$

32. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

33. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37
- ② 40
- ③ 43
- ④ 46
- ⑤ 49

34. 반지름이 r (cm)인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r$ (cm^2)

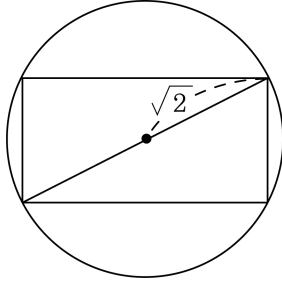
② r^2 (cm^2)

③ $2r^2$ (cm^2)

④ $\sqrt{2}r^2$ (cm^2)

⑤ $\frac{r^2}{2}$ (cm^2)

35. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



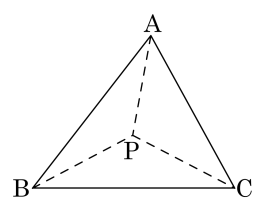
- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

- 36.** 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1 , x_2 , x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

- 37.** 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



38. 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=1$ 일 때 $ab+bc+ca$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{2}{11}$

39. a, b, c, d, x, y, z 가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

- ☐

$a^2 + b^2 \geq ab$
- ☐

$a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$
- ☐

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$
- ☐

$|a + b| \leq |a| + |b|$
- ☐

$|a| - |b| \geq |a - b|$
- ☐

$|a + b| \geq |a| - |b|$

답: _____

답: _____

답: _____

40. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은? (a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

41. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$
이 성립할 때 k 의 최댓값은?

① 2

② 5

③ 9

④ 12

⑤ 18

42. $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$$

이고,

등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$$

그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$

곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.

또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① abc , $a = b = c = 1$

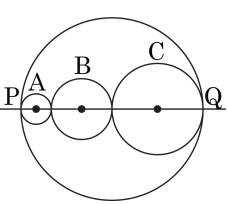
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a = b = c = 1$

④ abc , $a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a = b = c = 2$

43. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, 절대부등식 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)을 이용할 때, $x > 0$ 이면 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최소값은?

- ① $2\sqrt{3}$ ② $2^3\sqrt{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

44. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$
 ② $6\sqrt{35}$
 ③ $8\sqrt{35}$
- ④ $10\sqrt{35}$
 ⑤ $12\sqrt{35}$

45. 실수 a, b, c 가 다음 두 등식을 만족할 때, c 값의 범위는?

$$a + b + c = 5, \quad b^2 + c^2 = 11 - a^2$$

- ① $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$ ② $-3 \leq c \leq \frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3} \leq c \leq 3$
④ $1 \leq c \leq \frac{3}{2}$ ⑤ $1 \leq c \leq \frac{5}{2}$