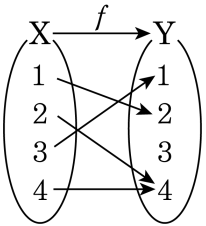
1. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 함수가 아니다.
㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
㉤ 일대일대응이다.



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가
1 개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 $1, 2, 3, 4$ 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $Y \neq f(x)$ 이므로
일대일대응이 아니다.

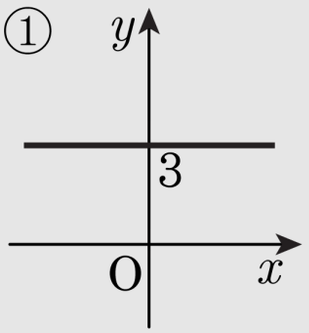
2. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

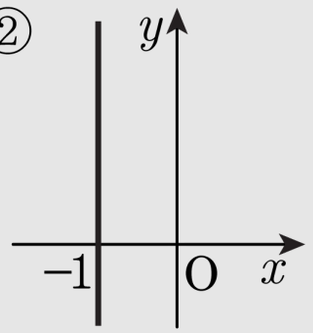
① $y = 3$ ② $x = -1$ ③ $y = -x + 1$

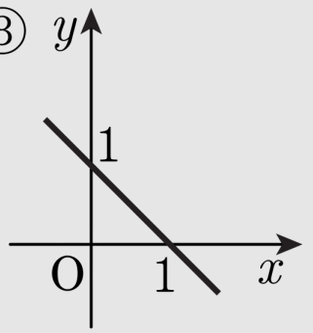
④ $y = |x|$ ⑤ $y = x^2$

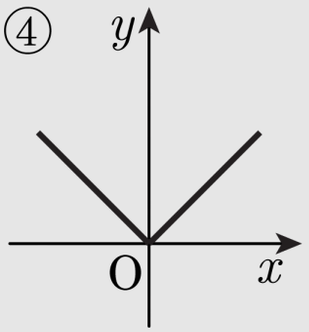
해설

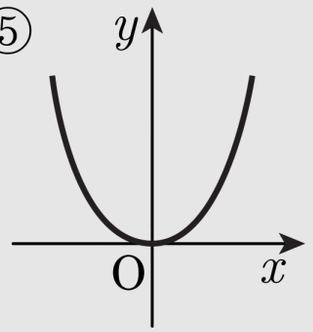
주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

여기서 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 찾으면 된다.

따라서 만족하는 함수는 ③이다.

3. 두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여
X 에서 Y 로의 상수함수는
$f(x) = 1,\ f(x) = 2,\ f(3) = 3$ 의 3 개가 있다.

4. 함수 $f : x \to ax + b$ 이고 $f(0) = -3$, $\{f(1) + 1\}^2 = 4$ 일 때 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = ax + b$ 에서 $f(0) = b = -3$

$f(1) = a + b = a - 3, \{f(1) + 1\}^2 = (a - 3 + 1)^2 = 4$

$(a - 2)^2 = 4$

$\therefore a = 0$ 또는 4

$\therefore a \neq 0$ 이므로 $a = 4$

$\therefore a + b = 4 + (-3) = 1$

5. 다음 보기 중 두 함수 f, g 가 서로 같은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x)=|x|,\ g(x)=x$

㉡ 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때 $f(x)=x,\ g(x)=x^3$

㉢ $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ g(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(-1)=1,\ g(-1)=-1$ 이므로 $f\neq g$

㉡ $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(0)=g(0)=0,$
$f(1)=g(1)=1$ 이므로 $f=g$

㉢ $f(x)$ 의 정의역은 $\{x\mid x\neq -2$인 모든 실수$\}$ 이고
$g(x)$ 의 정의역은 $\{x\mid x\neq \pm 2$인 모든 실수$\}$ 이므로 $f\neq g$

따라서 $f=g$ 인 것은 ㉡ 뿐이다.

6. $f : X \to Y$ 가 상수함수이고, $f(100) = 100$ 일 때, $f(2006) = a$ 이다. $a + 100$ 의 값은?

① 0 ② 100 ③ 200 ④ 300 ⑤ 400

해설

상수함수에 정의에 의해 $f(x) = 100$

$\therefore\ f(2006) = 100 = a$

따라서 $a + 100 = 200$

7. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가
$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,
집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는
$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$(개)이다.
문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로
$\therefore\ n = 4$
$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는
$2^n = 2^4 = 16$(개)

8. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)
=(n 의 일의 자리수)
$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a,\ f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 이므로 $f : A \to B$ 가 일대일 대응이려면
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

10. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ ② $a \leq -1$ ③ $a > -1$

④ $a < 1$ ⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \geq 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

11. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

> 집합 $\mathrm{A} = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ 에 대하여,
> 함수의 개수는 m 개,
> 일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
> 상수 함수는 s 개,
> 항등함수는 r 개이다.
> $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지) $\therefore\ m = 27$
일대일 대응의 개수는
$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
$\therefore\ s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

12. 모든 실수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x) = [x] + [-x]$ 의 치역은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\{-1,\ 0\}$ ② $\{-1,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1\}$

④ $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ⑤ $\{0\}$

해설

정수 n 에 대하여

(i) $x = n$ 이면

$f(x) = [x] + [-x] = n + (-n) = 0$

(ii) $n < x < n + 1$ 이면

$-n - 1 < -x < -n$ 이므로 $[-x] = -n - 1$

$\therefore\ f(x) = [x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$

(i), (ii)에서 구하는 치역은 $\{-1,\ 0\}$ 이다.

13. 임의의 양수 x, y에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore\ f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

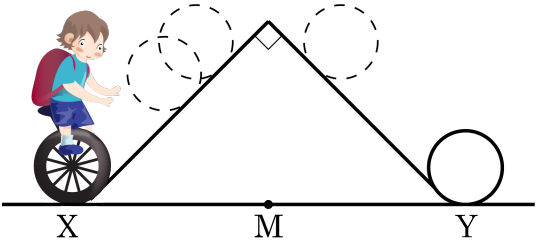
$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(1) = 0$ 이므로

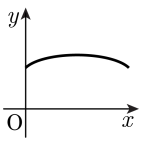
$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

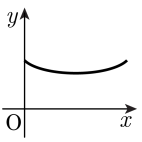
⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

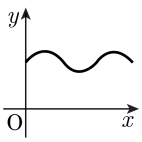
$= f(x) - f(y)$($\because$ ④가참)

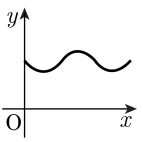
14. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y라 하고, 선분 XY의 중점을 M이라 하자. 철수가 X에서 출발하여 최단 거리로 Y까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t와 점 M에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d에 대하여 d를 t의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)

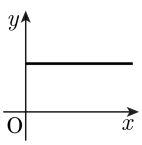


① 

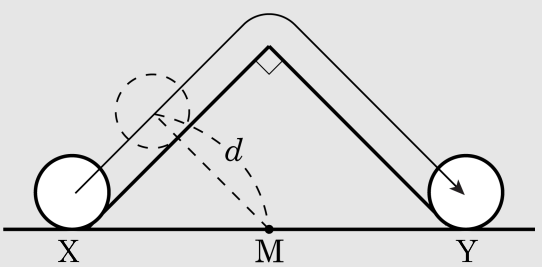
② 

③ 

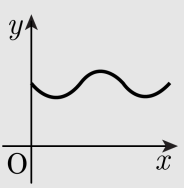
④ 

⑤ 

해설



따라서 d를 t의 함수로 나타낸 그래프는



15. 6 명의 학생에게 쪽지시험을 보게 한 후 답안지를 서로 바꾸어서 채점을 하게 하였다. 6 명 모두 자신의 답안지를 가지지 않게 바꿀 수 있는 방법은 몇 가지인가?

① 44 ② 60 ③ 108 ④ 126 ⑤ 265

해설

6 명의 답안지를 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로 놓는다.
i 가 가진 답안지를 $f(i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 로 놓으면
$(1-f(1))(2-f(2))(3-f(3))(4-f(4))(5-f(5))\ (6-f(6)) \neq 0$
인 일대일대응
$f : A \to A$ 의 개수를구하는 것이다.
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 일 때,
위의 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 a_n 이라 하면 $a_1 = 0,\ a_2 = 1\ f(1) = 2$ 인 경우
다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.
(i) $f(2) = 1$ 인 경우 : 이때, f 의 개수는 $3, 4, \cdots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 방법 이므로 그 수는 a_{n-2} 이다.
(ii) $f(2) \neq 1$ 인 경우 : $f(2)$ 는 $3, 4, \cdots, n$의 값이 될 수 있고, 1 은 $f(3),\ f(4),\ \cdots,\ f(n)$ 의 함수값이므로 1 은 2 로 바꾸어도 상관없다. 즉, $2, 3, \cdots, n$ 은 모두 겹치지 않게 배열하는 가지수이므로 그 수는 a_{n-1} 이다.
(i)(ii) 에서 $f(1) = 2$ 인 경우 f 의 가짓수는 $a_{n-1} + a_{n-2}$ 이고,
$f(1) = 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ 인 경우에도 마찬가지이므로
구하는 a_n 은 다음식을 만족한다.
$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$
따라서, $a_3 = 2(1+0) = 2,$
$a_4 = 3(2+1) = 9,$
$a_5 = 4(9+2) = 44,$
$a_6 = 5(44+9) = 265$