

1. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

2. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 } (\quad \text{㉢} \quad) \text{ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ① $|ab|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$
- ② $|ab|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$
- ③ $|ab|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$
- ④ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$
- ⑤ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

3. 다음은 $|a| < 1$, $|b| < 1$, $|c| < 1$ 일 때 부등식 $abc + 2 > a + b + c$ 가 성립함을 증명한 것이다. ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} abc + 2 &> a + b + c \\ &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\ &= (1 - ab)(1 - c) + (\text{㉠}) \end{aligned}$$

$|a| < 1$ 이므로 $(\text{㉡}) < 1 - a < (\text{㉢})$

같은 방법으로 $(\text{㉢}) < 1 - b < (\text{㉢})$,

$$(\text{㉡}) < 1 - c < (\text{㉢})$$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $(\text{㉡}) < 1 - ab < (\text{㉢})$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c) = (1 - ab)(1 - c) + (\text{㉠}) > (\text{㉡})$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

① $(1 + a)(1 + b), 0, 2$

② $(1 - a)(1 + b), 0, 2$

③ $(1 + a)(1 + b), -1, 1$

④ $(1 - a)(1 - b), 0, 2$

⑤ $(1 - a)(1 - b), -1, 1$

해설

$$\begin{aligned} abc + 2 > a + b + c &= abc + 1 + 1 - a - b - c \\ &= abc - ab - c + 1 + 1 + ab - a - b \\ &= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) \end{aligned}$$

$|a| < 1$ 이므로 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 < 1 - a < 2$

$|b| < 1$ 이므로 $-1 < b < 1$ 이므로 $0 < 1 - b < 2$

$|c| < 1$ 이므로 $-1 < c < 1$ 이므로 $0 < 1 - c < 2$

또한 $|ab| < 1$ 이므로 $0 < 1 - ab < 2$

따라서 $abc + 2 - (a + b + c)$

$$= (1 - ab)(1 - c) + (1 - a)(1 - b) > 0$$

이므로 $abc + 2 > a + b + c$

4. 다음 부등식 중 성립하지 않는 것은? (단, 모든 문자는 실수)

① $|a| + |b| \geq |a + b|$

② $a \geq b > 0$ 일 때 $\frac{b}{2+a} \geq \frac{a}{2+b}$

③ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc (a > 0, b > 0, c > 0)$

④ $\sqrt{3} + \sqrt{13} > \sqrt{2} + \sqrt{14}$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

해설

$$\begin{aligned}\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} &= \frac{2b + b^2 - 2a - a^2}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{b^2 - a^2 + 2(b-a)}{(2+a)(2+b)} \\ &= \frac{(b-a)(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \text{여기서}\end{aligned}$$

$(a+2)(b+2) > 0$ 이고

$(b-a) \leq 0, a+b+2 > 0$ 이므로

$(\because a \geq b > 0)$

$$\frac{b}{2+a} - \frac{a}{2+b} \leq 0$$

$$\therefore \frac{b}{2+a} \leq \frac{a}{2+b}$$

5. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(증명)

$$\boxed{\text{가}} - \boxed{\text{나}}$$

$$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > \boxed{\text{다}}$$

그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \boxed{\text{다}} 0$,

$$\sqrt{a+b} \boxed{\text{다}} 0 \text{ 이므로 } \therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
 ② $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
 ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
 ④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
 ⑤ $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

6. $a > 0$ 일 때, $x = \sqrt{a^2 + 1}$ 과 $y = a + \frac{1}{2a}$ 의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $x \leq y$ ② $x < y$ ③ $x \geq y$ ④ $x > y$ ⑤ $x = y$

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= a^2 + 1 \\y^2 &= \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}, \\ \frac{1}{4a^2} &> 0 \text{ 이므로 } y^2 > x^2 \\ \therefore y &> x\end{aligned}$$

7. 부등식 $n^{20} < 3^{30}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\frac{n^{20}}{3^{30}} = \frac{(n^2)^{10}}{(3^3)^{10}} = \left(\frac{n^2}{27}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{n^2}{27} < 1 \text{ 이므로 } n^2 < 27$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 5이다.

8. 다음 부등식 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $3^{40} > 2^{60}$ ㉡ $3^{200} > 6^{150}$

㉢ $5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

- ① ㉠② ㉡③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{3^{40}}{2^{60}} = \frac{(3^2)^{20}}{(2^3)^{20}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{20} > 1$
 $\therefore 3^{40} > 2^{60}$

㉡ $\frac{3^{200}}{6^{150}} = \frac{(3^4)^{50}}{(6^3)^{50}} = \frac{(3^4)^{50}}{(2^3 \cdot 3^3)^{50}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{50} < 1$
 $\therefore 3^{200} < 6^{150}$

㉢ $\frac{5^{10}}{2^{30}} = \frac{5^{10}}{(2^3)^{10}} = \left(\frac{5}{8}\right)^{10} < 1 \quad \therefore 5^{10} < 2^{30}$
 $\frac{2^{30}}{3^{20}} = \frac{(2^3)^{10}}{(3^2)^{10}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{10} < 1 \quad \therefore 2^{30} < 3^{20}$
 $\therefore 5^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

9. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- $\textcircled{\tiny \ominus} \quad |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad |x + y| \geq |x - y|$
- $\textcircled{\tiny \oplus} \quad |x - y| \geq |x| - |y|$

- $\textcircled{1} \quad \textcircled{\tiny \ominus}$

$\textcircled{2} \quad \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{3} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{4} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$

$\textcircled{5} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$

해설

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad (\text{반례}) \quad x = 1, y = -1 \text{ 일 때}$
 $|1 + (-1)| = 0, \quad |1 - (-1)| = 2 \text{ 이므로}$
 $|x + y| < |x - y|$

$\textcircled{\tiny \oplus} \quad |x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$ 이다.

10. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \leq b^2$

② $b^2 \leq a$

③ $a^2 \leq b$

④ $b \leq a^2$

⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 + 2axy + by^2 \geq 0$ 이 성립하려면

$$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \leq 0$$

이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면

$$y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } a^2 - b \leq 0$$

$$\therefore a^2 \leq b$$

11. 부등식 $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$ 이 절대부등식이 되기 위한 정수 a 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \leq 0$ 이어야 하므로

$a^2 + 2a + 1 - 4a - 4$

$= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

따라서 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개

12. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

1, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$

- ① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ ② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$ ④ $\sqrt{b-a} < 1$
- ⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
 $= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > 1$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
 $= (a+b) - b + a$
 $= 2a > 0$

$\therefore 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$
 $= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
 $= 2\sqrt{ab} - 2a$
 $= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$
 $\therefore \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

13. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x + 1 > 0$	$\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad x + y \geq x - y $	$\textcircled{\tiny \supset} \quad x + y \geq x - y $

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \supset}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqsubset}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

해설

$\textcircled{\tiny \neg} \quad x > -1$ 일 때만 성립한다.
 $\textcircled{\tiny \sqsubset} \quad x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x = y = 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \sqcup} \quad (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
 $\quad = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
 $\quad = 2(|xy| + xy) \geq 0$
 $\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
 $\textcircled{\tiny \supset} \quad$ (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때
 $|2 + (-3)| = 1, |2 - (-3)| = 5$ 이므로
 $|x + y| < |x - y|$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \supset}$ 이다.

14. 어느 학생이 x, y, z 의 평균 A 를 구하기 위하여 x, y 의 평균 C 를 먼저 구하고, C 와 z 의 평균 B 를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?
(단, $x < y < z$)

① $B = A$

② $B < A$

③ $B > A$

④ $B \leq A$

⑤ $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3}, C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z - x - y}{12} = \frac{(z-x) + (z-y)}{12} > 0$$

$$\therefore B > A$$

15. 다음 중 거짓인 명제는? (단 x, y, z, a, b 는 실수이다.)

- ① 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 최대인 것은 정사각형이다.
- ② $xy + yz + zx = 1$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
- ③ a, b, c 가 양수일 때, $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$
- ④ $a \geq b \geq 0$ 이면 $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$
- ⑤ $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$

해설

- ① $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)
- ② $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$
 $= \frac{1}{2} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$
- ③ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2, \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$
(단, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)
따라서 $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$
- ④ $(\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} - 2b$
 $= 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$
- ⑤ <반례> $x = \frac{3}{2}, y = 10$
또는 $x = \frac{5}{4}, y = 8$ 등 여러 경우가 있다.