1. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1,\ 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$
즉, $12x+5y+k=0$
이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12\cdot 1+5\cdot 1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$$

$$\frac{|17+k|}{13}=2$$

$|k+17|=26$

$k+17=\pm 26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은
$9+(-43)=-34$

2. 원 $x^2+y^2=4$ 를 점 $(0,1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $f(x,y)=0$ 일 때, $f(x-a,\ y-b)=0$ 은 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 모두 구하면?

① 0, 2, 4 ② 1, 4, 5 ③ −2, 2, −6
④ 4, 5, 6 ⑤ −1, 3, 4

해설

원 $x^2+y^2=4$ 를 점 $(0,1)$ 에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2+(y-2)^2=4$ 이다.
이 원을 x 축으로 a 만큼,
y 축으로 b 만큼 이동시킨 도형이
x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 되므로,

$\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \end{cases}$

따라서 $a+b=2$ 또는 -2 또는 -6

3. 원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2-10x-8y+40=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2+(y-4)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2+(y-8)^2=1$ 과
직선 $3x+ay+6=0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5,4)$, $(-1,\ 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x+ay+6=0$ 위에 있다.
두 점 $(5,4)$, $(-1,8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2,6)$ 이므로
$3\cdot 2+a\cdot 6+6=0$
$\therefore a=-2$

4. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x'+y'$ 을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x+2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
$x'=y-2$ $y'=x+2$, $(x, y)=(3, 4)$ 이므로
$x'=2$ $y'=5$, $\therefore$ $x'+y'=7$

5. 점 A(3, 4) 를 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 할 때, A′ 의 좌표는?

① $(-3,\ 5)$ ② $(-3,\ 8)$ ③ $(3,\ 2)$

④ $(2,\ 5)$ ⑤ $(5,\ 2)$

해설

A′ 를 $(a,\ b)$ 라 하자
i) A′ 과 (3, 4) 의 중점은 $x-y+2=0$ 을 지난다.
$\therefore\ \dfrac{a+3}{2}-\dfrac{b+4}{2}+2=0$
ii) A′ 과 (3, 4) 를 잇는 직선과 직선 $x-y+2=0$ 은 수직으로 만난다.
$\therefore\ \dfrac{4-b}{3-a}=-1$
i) 과 ii) 를 연립하여 a, b 를 구하면,
$a=2,\ b=5$

6. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(5,\ 3)$을 직선 $x+y-3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는?

① $(3,\ 1)$ ② $(2,\ -1)$ ③ $(0,\ -2)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(-1,\ 3)$

해설

구하고자 하는 점의 좌표를 $\mathrm{A}'(a,\ b)$ 라 할 때,
두 점의 중점 $\left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$ 는
직선 $x+y-3=0$ 위에 있으므로
대입하여 정리하면 $a+b=-2$ ······㉠
점 A 와 A′ 를 지나는 직선과 직선
$x+y-3=0$ 은 직교하므로
$\frac{b-3}{a-5}\times(-1)=-1$ 에서 $a-b=2$ ······㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=0,\ b=-2$ 이므로 $(0,\ -2)$ 가 된다.

7. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$　② $a^2+b^2=9$　③ $a^2+b^2=16$
④ $a^2+b^2=25$　⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

8. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로
각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선
$y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 와
직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$
$\therefore\ b = 2a + 3$
따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+3)^2}$
$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$ 이므로
$a = -\frac{6}{5}$ 일 때,
최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

9. 점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 의 중심과 일치하였다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a+1, b-2)$
이때, 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 이므로
이 원의 중심은 $(-2, 2)$ 이다.
점 $(a+1, b-2)$ 와 점 $(-2, 2)$ 가 일치하므로
$a+1=-2, b-2=2$ 에서
$a=-3,\ \ b=4 \qquad \therefore a+b=1$

10. 직선 $x-2y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

① $x+2y+4=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x-2y-4=0$
④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

11. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$　② $2x+y-1=0$　③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$　⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭)하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭)하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭)하면 $2x+y+1=0$이므로
$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭)하면 $2y+x+1=0$
$\therefore x+2y+1=0$

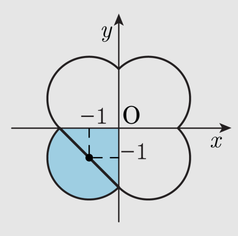
12. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$ ② $2\pi+4$ ③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$ ⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

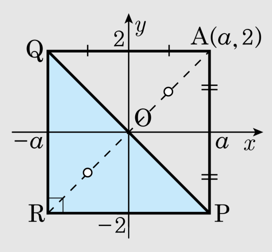
따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

13. 점 A $(a, 2)$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이는 20 이다. 이 때, 양수 a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설



다음 그림에서 점 A $(a, 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점은 P $(a, -2)$
점 A $(a, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 Q $(-a, 2)$
점 A $(a, 2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 R $(-a, -2)$
따라서, 삼각형 PQR 는 $\angle R = 90°$ 인 직각삼각형이다.
이때, $\overline{PR} = 2a$, $\overline{QR} = 4$ 이고
삼각형 PQR 의 넓이는 20 이므로
$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4 = 20$$
$\therefore a = 5$

14. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

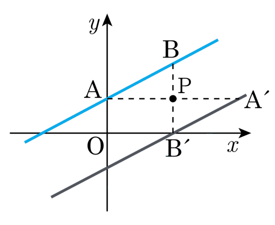
15. 포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y = x - 1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

$y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y - a) = x^2$, $y = -x^2 + a$
이 곡선이 $y = x - 1$ 에 접하려면
$x - 1 = -x^2 + a$, $x^2 + x - a - 1 = 0$ 에서
$D = 1^2 - 4(-a - 1) = 0$
$\therefore\ a = -\frac{5}{4}$

16. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3, 1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A′, B′ 은 각각 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다.
즉, $\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서
$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$
따라서, 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.
또, 직선 A′B′ 은 점 A′ $(3, 1)$ 을 지나므로 직선 A′B′ 의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$
$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
따라서, $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이므로
$ab=-\frac{1}{4}$

17. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① (1, 1) ② (1, 2) ③ (−1, 1)
④ (−1, −1) ⑤ (1, −1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 O(0, 0) 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 A(2, 2) 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 P(1, 1) 이다.

18. 점 $(1,-2)$를 지나는 직선을 점$(2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4,-4)$를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-4x+2$　② $y=4x+2$　③ $y=-4x+4$
④ $y=4x+4$　⑤ $y=-4x+6$

해설

$(1,-2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
$y+2=m(x-1)\cdots$①이라 하면
①식을 점 $(2,3)$에 대칭이동하면 (중점공식이용)
$x\rightarrow 4-x\ y\rightarrow 6-y$이므로
$6-y+2=m(4-x-1),\ y=m(x-3)+8\cdots$②
직선 ②를 x축에 대칭이동하면
$-y=m(x-3)+8\quad\cdots$③
직선 ③이 점 $(4,-4)$를 지나므로
$4=m(4-3)+8\therefore m=-4$
따라서 처음 직선의 방정식 ①은
$y+2=-4(x-1),\ y=-4x+2$

19. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ m)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 m 의 값을 구하여라.

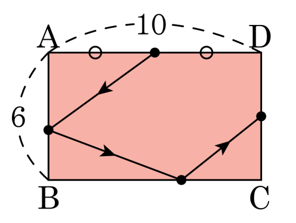
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 선분 A′B 의 길이와 같다.
점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A'}(1,\ -3)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+(m+3)^2}=5$
$(m+3)^2+9=25$, $(m+3)^2=16$
$m+3=\pm4 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0\ )$

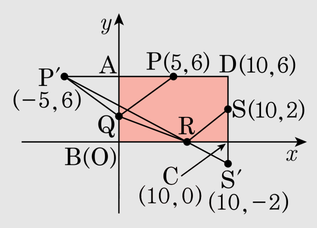
20. 직사각형 ABCD 에서 변 AD 의 중점에서 출발하여 변 AB, 변 BC 를 거쳐 변 CD 를 1 : 2 로 내분하는 점에 이르는 최단 거리는? (단, $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=10$)



① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

점 B가 원점이 되도록 직사각형 ABCD 를
좌표평면 위에 놓고 출발점을 P,
각 변과 만나는 점을 Q, R, S 라 할 때,
점 P 를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P′ ,
점 S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 S′ 이라고 하자.



이 때, 네 점 P′ , Q , R , S′ 이 일직선 위에
있을 때 구하는 거리는 최솟값을 갖는다.
∴ P′(−5, 6), S′(10, −2) 에서
$\overline{P'S'}=\sqrt{(10-(-5))^2+(-2-6)^2}=\sqrt{289}=17$

21. 두 점 $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(4,1)$ 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $\mathrm{A}(1,3)$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$\mathrm{A}'(1,-3)$
이 때, 다음 그림에서
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$
또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$