1. $x > 0$, $y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\,, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

3. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4. $x \geq 0$, $y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

5. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$가 성립한다. $a > 1$일 때, a, b, c의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$　② $a < c < b$　③ $b < c < a$

④ $c < a < b$　⑤ $c < b < a$

6. $a > b > c > 0$일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$

④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

7. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$　② $A \leq B$　③ $A > B$
④ $A \geq B$　⑤ $A = B$

8. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

② $|ab|+ab$, $|ab|=-ab$, $ab \ge 0$

③ $|ab|-ab$, $|ab|=-ab$, $ab \le 0$

④ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

10. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
$= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2$
$= \ a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2$
$= \ 2(|ab| - ab)\ 0$
$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2$
$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

11. 실수 x, y에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \ge \lvert x+y\rvert$	㉡ $\lvert x+y\rvert \ge \lvert x-y\rvert$
㉢ $\lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

12. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $\lvert a\rvert^2 = a^2$	㉡ $\lvert ab\rvert \geq ab$
㉢ $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$	㉣ $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

13. $a \geq 0,\ b \geq 0$일 때, $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\text{나})^2}{2}$이므로
부등식 $\frac{a+b}{2}$ (가) $\sqrt{ab}$이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$
② $\geq,\ a-b,\ a=b=0$
③ $>,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a=b$
④ $>,\ a-b,\ a=b$
⑤ $\geq,\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ a \geq b$

14. 다음은 $a>0,\ b>0$일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. (　　　) 안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\qquad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　② $\sqrt{a}-\sqrt{b}$　③ $a+b$

④ $a-b$　⑤ ab

15. 다음은 $a \ge 0, b \ge 0$인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

[(가)] - [(나)] $= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$ $= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [(다)] 따라서, [(가)] $\ge$ [(나)] 한편, 등호는 [(라)] 일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$

② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

16. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\} = \{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p} + \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

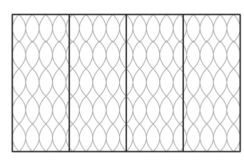
17. 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

18. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

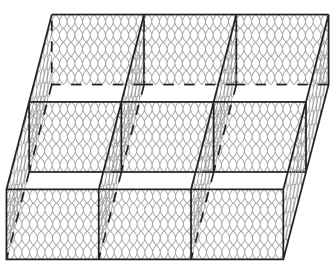
19. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$ ② $70\mathrm{m}^2$ ③ $80\mathrm{m}^2$

④ $90\mathrm{m}^2$ ⑤ $100\mathrm{m}^2$

20. 동원이가 길이 $152\,\mathrm{m}$ 인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로의 길이는?



① 19　　② $\frac{68}{3}$　　③ $\frac{70}{3}$　　④ 24　　⑤ $\frac{76}{3}$

21. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$　　② $5+5\sqrt{2}$　　③ 25

④ $\frac{25}{4}+\sqrt{2}$　　⑤ $\frac{45}{4}+5\sqrt{2}$

22. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

답: ________

23. $a,\ b,\ c$가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=2$일 때, $a+\sqrt{2}b+c$의 값을 P라 하면, P의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \le P \le \sqrt{2}$
② $-2\sqrt{2} \le P \le 2\sqrt{2}$
③ $-\sqrt{3} \le P \le \sqrt{3}$
④ $-2\sqrt{3} \le P \le 2\sqrt{3}$
⑤ $-3\sqrt{3} \le P \le 3\sqrt{3}$

24. 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$

② $M=3, m=-3$

③ $M=6, m=0$

④ $M=6, m=-6$

⑤ $M=6, m=-12$

25. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠ $= \frac{4}{\sqrt{xy}}$ $\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡ $\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢ 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots\cdots$ ㉣

① ㉠　　② ㉡
③ ㉢　　④ ㉣
⑤ 틀린 곳이 없다.

26. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

27. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 인 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $abc \le 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$ 을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2, \quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다] 에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$　　② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$ 이고 $b=c$

③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$　　④ $abc,\ a=b$ 이고 $c=2$

⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

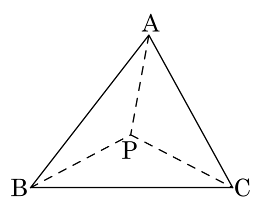
28. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3라 할 때, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$ ② $\frac{144}{15}$ ③ $\frac{144}{25}$ ④ $\frac{288}{25}$ ⑤ $\frac{576}{25}$

29. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

답: ________

30. 넓이가 a인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PCA의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때 $S_1^2+S_2^2+S_3^2$의 최솟값은?



① $\dfrac{a^2}{3}$　② a^2　③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$　⑤ $3\sqrt{3}a^2$

31. 다음 [보기] 중에 x에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x는 실수이다.)

보기	
㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2-2x+1\geq 0$
㉢ $x^2<x+12$	㉣ $x^2+1>x$

① ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

32. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y는 실수임)

① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$(단, $ax = by$일 때, 등호성립)

④ $a^2 + b^2 \geq ab$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

⑤ 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

33. 부등식 $a^2+b^2>2(a+b-1)$이 성립하지 않도록 하는 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

34. 서로 다른 세 양수 $p,\ q,\ r$에 대하여 $\dfrac{2}{p+q}+\dfrac{2}{q+r}+\dfrac{2}{r+p} \ge \dfrac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k의 최댓값은?

① 2 ② 5 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

35. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{\text{(나)}}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

36. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a + b + c \geq 3$
Ⅱ. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab + bc + ca \geq 3$
Ⅳ. $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ