

1. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

3. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

4. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

① 2

② 3

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{15}$

⑤ 4

5. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$ 가 성립한다. $a > 1$ 일 때, a, b, c 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$

② $a < c < b$

③ $b < c < a$

④ $c < a < b$

⑤ $c < b < a$

6. $a > b > c > 0$ 일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$ 의 대소를
바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < C < A$

④ $B < A < C$

⑤ $C < A < B$

7. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$

$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

8. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$

② $2^{10n} \leq 1000^n$

③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \geq 1000^n$

⑤ $2^{10n} = 1000^n$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2 \\ &= 2(\text{㉠}) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2$$

그런데 $|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0$ 이므로

$|a| + |b| \geq |a + b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

- ① $|ab| + ab, |ab| = ab, ab \leq 0$
 ② $|ab| + ab, |ab| = -ab, ab \geq 0$
 ③ $|ab| - ab, |ab| = -ab, ab \leq 0$
 ④ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \geq 0$
 ⑤ $|ab| - ab, |ab| = ab, ab \leq 0$

10. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
- ② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
- ③ $|a|^2 = a^2$
- ④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
- ⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

11. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $|x| + |y| \geq |x + y|$

㉡ $|x + y| \geq |x - y|$

㉢ $|x - y| \geq |x| - |y|$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

12. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $|a|^2 = a^2$

㉡ $|ab| \geq ab$

㉢ $|a| + |b| \geq |a - b|$

㉣ $|a| - |b| \geq |a - b|$

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

13. $a \geq 0, b \geq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2}$ (가) \sqrt{ab} 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(나)^2}{2} \text{ 이므로}$$

부등식 $\frac{a+b}{2}$ (가) \sqrt{ab} 이 성립함을 알 수 있다.

이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

① $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

② $\geq, a - b, a = b = 0$

③ $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

④ $>, a - b, a = b$

⑤ $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

14. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③ $a + b$

④ $a - b$

⑤ ab

15. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [가] - [나] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [다] \end{aligned}$$

따라서, [가] \geq [나]

한편, 등호는 [라]일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① (가) $a+b$ (나) \sqrt{ab} (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$
- ② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$
- ③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) \sqrt{ab} (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ④ (가) \sqrt{ab} (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

16. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고

한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

17. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

18. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2 + 2x + 2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,

$-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

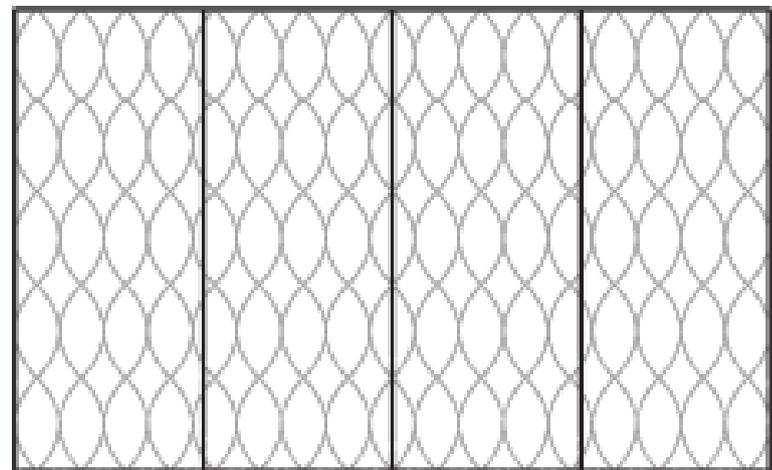
② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

19. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

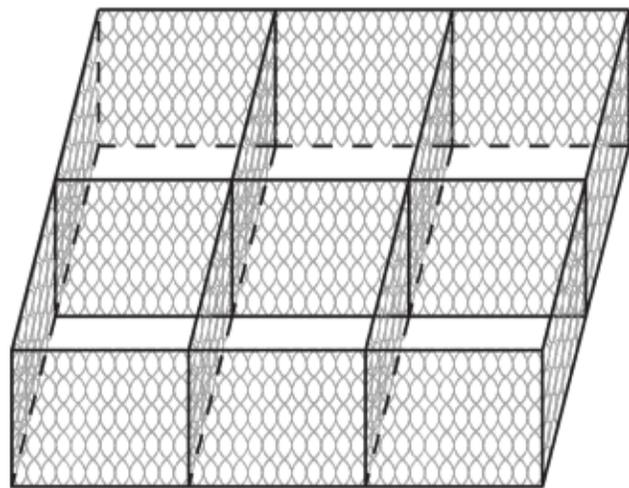
② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

20. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

21. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

22. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.



답: _____

23. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때, $a + \sqrt{2}b + c$ 의 값을 P 라 하면, P 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3} \leq P \leq \sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3} \leq P \leq 2\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3} \leq P \leq 3\sqrt{3}$

24. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

25. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \dots \textcircled{\Gamma}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$

$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \dots \textcircled{\text{E}}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다. $\textcircled{\text{E}}$

① $\textcircled{\Gamma}$

② $\textcircled{\text{L}}$

③ $\textcircled{\text{E}}$

④ $\textcircled{\text{E}}$

⑤ 틀린 곳이 없다.

26. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.

② \sqrt{ab} 는 a, b 의 기하평균이다.

③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

27. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}$$

(단, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$ab + bc + ca \geq 3 \text{ ([가])}$$

(단, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$\therefore S \geq 1 + 3 \sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$$

$$= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$$

$$\text{따라서 } 3 \sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$$

(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc, a = b = c = 1$

② $\sqrt[3]{abc}, a = 2$ 이고 $b = c$

③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a = b = c = 1$

④ $abc, a = b$ 이고 $c = 2$

⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a = b = c = 2$

28. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1, x_2, x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

① $-\frac{288}{25}$

② $\frac{144}{15}$

③ $\frac{144}{25}$

④ $\frac{288}{25}$

⑤ $\frac{576}{25}$

29. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.



답: _____

30. 넓이가 a 인 삼각형 ABC 의 내부에 한 점 P 에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

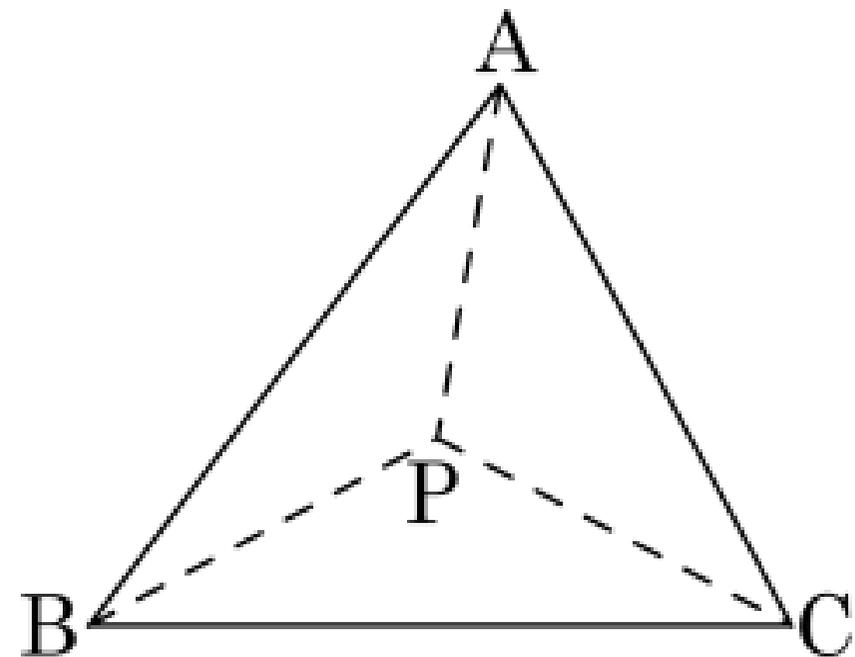
① $\frac{a^2}{3}$

② a^2

③ $\sqrt{3}a^2$

④ $3a^2$

⑤ $3\sqrt{3}a^2$



31. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

㉢ $x^2 < x + 12$

㉣ $x^2 + 1 > x$

① ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

32. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y 는 실수임)

① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (단, $ax = by$ 일 때, 등호성립)

④ $a^2 + b^2 \geq ab$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)

⑤ 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)

33. 부등식 $a^2 + b^2 > 2(a + b - 1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

34. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$

이 성립할 때 k 의 최댓값은?

① 2

② 5

③ 9

④ 12

⑤ 18

35. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면

$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$$

이 때, (산술평균) \geq (기하평균)을 이용하면

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

$$ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{\text{가}}$$

등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.

$$\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{ 1 + (abc)^{\frac{1}{3}} \right\}^3$$

$$\text{그러므로 } (abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$$

곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.

또, 등호는 $\boxed{\text{나}}$ 일 때 성립한다.

① $abc, a = b = c = 1$

② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$

③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$

④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$

⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

36. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

$$\text{I. } a + b + c \geq 3$$

$$\text{II. } a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

$$\text{III. } ab + bc + ca \geq 3$$

$$\text{IV. } (a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$$

① I, II

② I, III

③ III, IV

④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV