

1. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{이 때 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x + 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } & (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore & (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leq \sqrt{2(x+y)} \\ & (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} = \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를
바르게 나타낸 것은?
- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로
 A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
 $A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
 $B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
 $C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

3. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
이 때, $x^2 + y^2 = 10$ 이므로
 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
(단, 등호는 $x = \frac{y}{3}$ 일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

4. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2$
 $= 2(x + 3y)$
 $= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

5. 세 실수 a, b, c 사이에 두 관계식 $3a - b + c = 2$, $a + b + c = 4$ 가 성립한다. $a > 1$ 일 때, a, b, c 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $a < b < c$

② $a < c < b$

③ $b < c < a$

④ $c < a < b$

⑤ $c < b < a$

해설

$$3a - b + c = 2 \cdots \cdots ①$$

$$a + b + c = 4 \cdots \cdots ②$$

$$① + ② \text{ 하면 } 4a + 2c = 6$$

$$2a + c = 3, a > 1 \text{ 이므로}$$

$$c = 3 - 2a \text{ 에서 } c < 1$$

$$① - ② \text{ 하면 } 2a - 2b = -2$$

$$\therefore a - b = -1, b = a + 1 \text{ 이므로}$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } b > a$$

$$\therefore c < a < b$$

6. $a > b > c > 0$ 일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$ 의 대소를
바르게 비교한 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$
④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$ 에서
 $b - a < 0$, $b - c > 0$, $a - c > 0$ 이므로
 $A = \frac{c}{b-a} < 0$, $B = \frac{a}{b-c} > 0$
 $C = \frac{b}{a-c} > 0$
$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$
$$\therefore B > C$$

따라서 $A < 0$, $B > C > 0$ 이므로
 $B > C > A$ 이다.

7. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

- ① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

8. n 이 자연수 일 때, 2^{10n} , 1000^n 의 대소를 비교하면?

- ① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \leq 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$
④ $2^{10n} \geq 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0$, $1000^n > 0$ 이고, n 이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$$\therefore 2^{10n} > 1000^n$$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\quad \text{㉠} \quad) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\quad \text{㉡} \quad), \text{ 즉 } (\quad \text{㉢} \quad) \text{ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ① $|ab|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$
② $|ab|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$
③ $|ab|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$
④ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$
⑤ $|ab|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} : & |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} : & \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} : & |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

10. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

11. 실수 x, y 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- $\textcircled{\tiny \ominus} \quad |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad |x + y| \geq |x - y|$
- $\textcircled{\tiny \oplus} \quad |x - y| \geq |x| - |y|$

- $\textcircled{1} \quad \textcircled{\tiny \ominus}$

$\textcircled{2} \quad \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{3} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \omin�}$

$\textcircled{4} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$

$\textcircled{5} \quad \textcircled{\tiny \omin�}, \textcircled{\tiny \oplus}$

해설

$\textcircled{\tiny \ominus} \quad (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x| + |y| \geq |x + y|$

$\textcircled{\tiny \omin�} \quad (\text{반례}) \quad x = 1, y = -1 \text{ 일 때}$
 $|1 + (-1)| = 0, \quad |1 - (-1)| = 2 \text{ 이므로}$
 $|x + y| < |x - y|$

$\textcircled{\tiny \oplus} \quad |x - y|^2 - (|x| - |y|)^2 = 2(|xy| - xy) \geq 0$
 $\therefore |x - y| \geq |x| - |y|$

따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \ominus}, \textcircled{\tiny \oplus}$ 이다.

12. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ a ^2 = a^2$	㉡ $ ab \geq ab$
㉢ $ a + b \geq a - b $	㉣ $ a - b \geq a - b $

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉢
- ③ ㉠, ㉡, ㉢
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned} \text{㉣ } & (|a| - |b|)^2 - |a - b|^2 \\ &= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2 \\ &= 2(ab - |ab|) \leq 0 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

13. $a \geq 0, b \geq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$ 이므로
부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ① $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$
- ② $\geq, a - b, a = b = 0$
- ③ $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$
- ④ $>, a - b, a = b$
- ⑤ $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$
 $= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$
(가), (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ 이므로
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$ 에서
등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$ 일 때이므로
등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

14. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③ $a + b$
- ④ $a - b$

⑤ ab

해설

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

15. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [\text{㉞}] - [\text{㉝}] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [\text{㉜}] \end{aligned}$$

따라서, $[\text{㉞}] \geq [\text{㉝}]$
한편, 등호는 $[\text{㉜}]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉞, ㉝, ㉜, ㉜에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① ㉞ $a+b$ ㉝ $\sqrt{ab}$ ㉜ ≥ 0 ㉜ $a=0, b=0$

② ㉞ $\frac{a+b}{2}$ ㉝ $2\sqrt{ab}$ ㉜ ≤ 0 ㉜ $a=0, b=0$

③ ㉞ $\frac{a+b}{2}$ ㉝ $\sqrt{ab}$ ㉜ ≥ 0 ㉜ $a=b$

④ ㉞ $\sqrt{ab}$ ㉝ $a+b$ ㉜ ≥ 0 ㉜ $a=b$

⑤ ㉞ $2\sqrt{ab}$ ㉝ $\frac{a+b}{2}$ ㉜ ≤ 0 ㉜ $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

16. 한 자리의 자연수 l, m, n 에 대하여 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 가 성립한다고 한다. 이 때, $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r}$ 의 최소값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3 \times 3 \sqrt{\frac{l}{p} \times \frac{m}{q} \times \frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m, n\} = \{p, q, r\}$ 이므로 $lmn = pqr$ 이다.

$$\text{따라서, } \frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \geq 3$$

(단, 등호는 $l = p, m = q, n = r$ 일 때 성립)

$\therefore$ 구하는 최소값은 3

17. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

- ① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \\ 3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

18. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

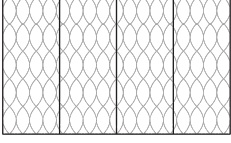
(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

19. 어떤 농부가 길이 60 m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



- ① 60m^2 ② 70m^2 ③ 80m^2
④ 90m^2 ⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

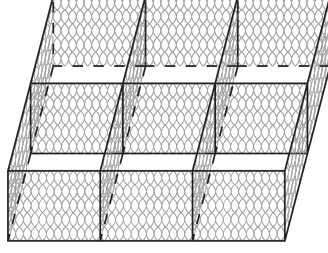
$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

20. 동원이 길이 152m인 철망을 가지고 다음 그림과 같이 여섯 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이가 최대가 될 때, 전체 직사각형의 가로 길이는?



- ① 19 ② $\frac{68}{3}$ ③ $\frac{70}{3}$ ④ 24 ⑤ $\frac{76}{3}$

해설

가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면
 $152 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy}$ 이고
등호가 성립할 때, xy 가 최대가 된다.
 $3x = 4y$ 일 때, 등호가 성립하므로
 $6x = 152$
즉, $x = \frac{76}{3}$ 일 때, 전체 우리의 넓이가 최대가 된다.

21. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

$$\text{둘레의 길이는 } 5 + 5\sqrt{2}$$

22. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

23. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때, $a + \sqrt{2}b + c$ 의 값을 P 라 하면, P 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3} \leq P \leq \sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3} \leq P \leq 2\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3} \leq P \leq 3\sqrt{3}$

해설

a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때
코시-슈바르츠 부등식을 이용하여
 $(1^2 + \sqrt{2}^2 + 1)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + \sqrt{2}b + c)^2$
 $4 \cdot 2 \geq (a + \sqrt{2}b + c)^2$
 $\therefore -2\sqrt{2} \leq a + \sqrt{2}b + c \leq 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow -2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

24. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$
 $\therefore M = 6, m = -6$

25. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다.㉣

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$
즉 $y = 4x$ 일 때이고,
㉡에서 등호가 성립하는 경우는
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.

26. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.
- ③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

27. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3([가])$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $([나])$ 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$
- ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
- ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$
- ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
- ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, abc \leq 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

28. 세 변의 길이가 6, 8, 10인 삼각형의 내부의 한 점 P에서 각 변에 이르는 거리를 각각 x_1 , x_2 , x_3 라 할 때, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $-\frac{288}{25}$
- ② $\frac{144}{15}$
- ③ $\frac{144}{25}$
- ④ $\frac{288}{25}$
- ⑤ $\frac{576}{25}$

해설

주어진 삼각형의 세 변을
 $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 8$ 이라 하면
 $\angle C$ 가 직각인 직각삼각형이므로
 $\triangle ABC = \triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PAC$
 $\therefore 24 = \frac{1}{2} \times x_1 \times 6 + \frac{1}{2} \times x_2 \times 8 + \frac{1}{2} \times x_3 \times 10$ 이므로
 $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 24$
코시-슈바르츠 부등식에서
 $(3^2 + 4^2 + 5^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq (3x_1 + 4x_2 + 5x_3)^2$
 $\therefore 50 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geq 576$
 $\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq \frac{576}{50} = \frac{288}{25}$
따라서 최솟값은 $\frac{288}{25}$

29. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

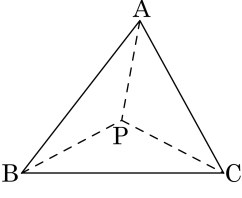
▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

30. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



해설

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 + S_3 &= a \\
 (1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) &\geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2 \\
 \therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &\geq \frac{a^2}{3}
 \end{aligned}$$

31. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

㉢ $x^2 < x + 12$

㉣ $x^2 + 1 > x$

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

㉢ $x^2 < x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$
 $\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$
 $\Leftrightarrow -3 < x < 4$

㉣ $x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$
 $\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

32. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y 는 실수임)

- ① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$
- ② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (단, $ax = by$ 일 때, 등호 성립)
- ④ $a^2 + b^2 \geq ab$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)
- ⑤ 두 양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (단, $a = b$ 일 때, 등호 성립)

해설

- ②의 반례 : a, b 가 음수인 경우
- ③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
 $= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$
 $- (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$
 $= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$
 $= (ay - bx)^2 \geq 0$ 단, 등호는 $ay = bx$ 일때 성립
- ④ $a^2 + b^2 - ab$
 $= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
등호는 $a = b = 0$ 일때 성립
- ⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
($\therefore$ 산술평균 $\geq$ 기하평균 $\geq$ 조화평균)

33. 부등식 $a^2 + b^2 > 2(a + b - 1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

준식을 정리하면

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 > 0, (a - 1)^2 + (b - 1)^2 > 0$$

따라서 $a = 1, b = 1$ 일 때만 이 부등식이 성립하지 않는다.

$$\therefore a + b = 2$$

34. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k 의 최댓값은?

- ① 2
- ② 5
- ③ 9
- ④ 12
- ⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q) + (q+r) + (r+p)$ 를 곱하면

$$6 + 2 \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq 2k$$
$$3 + \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r 이 양수이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
(좌변)

$$\begin{aligned} &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{q+r}{p+q} \cdot \frac{p+q}{q+r}} + 2 \sqrt{\frac{r+p}{q+r} \cdot \frac{q+r}{r+p}} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{r+p}{p+q} \cdot \frac{p+q}{r+p}} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $p=q=r$ 일 때 성립)
따라서 k 의 최댓값은 9이다.

35. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
 $1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$
이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
 $ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$
곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a = b = c = 1$
- ② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$
- ④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서
 $a = b = c = 1$

36. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

- I. $a + b + c \geq 3$
II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
III. $ab + bc + ca \geq 3$
IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$

- ① I, II ② I, III ③ III, IV
④ I, III, IV ⑤ I, II, III, IV

해설

$abc = 1$ 이므로
I. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
III. $ab + bc + ca \geq 3 \sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$
 $= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$
 $\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$