

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대하여  $f(x)$ 는 항등함수이고, 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x) = -2$  일 때,  $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

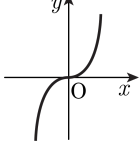
▶ 정답 : 2

해설

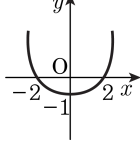
$f(x)$ 는 항등함수이므로  $f(4) = 4$   
모든  $x$ 에 대하여  $g(x) = -2$  이므로  
 $g(x)$ 는 상수함수이다.  
즉,  $g(-1) = -2$   
 $\therefore f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

2. 다음 함수의 그래프 중 일대일 대응이 아닌 것은?

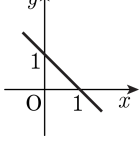
①



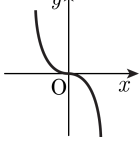
②



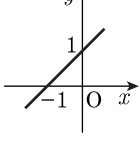
③



④



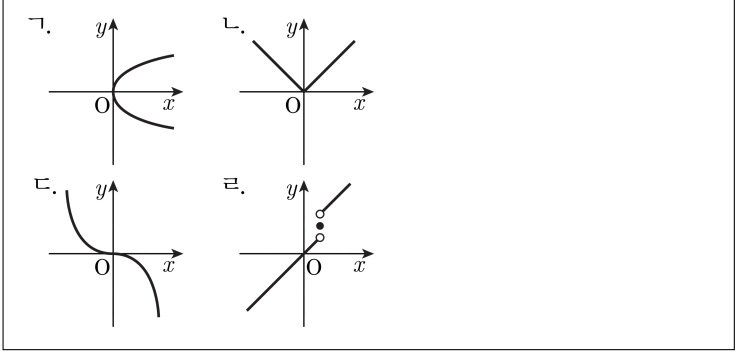
⑤



해설

치역과 공역이 같고 임의의 두 실수  $x_1, x_2$  에 대하여  $x_1 \neq x_2$  일 때  $f(x_1) \neq f(x_2)$  를 만족해야하므로 정답은 ②번이다.

3. 다음 방정식의 자취들 중 함수인 것은  $x$  개, 일대일 대응인 것은  $y$  개이다.  $x + y$  의 값은?



- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

해설

함수는 주어진  $x$  에  $y$  값이 하나씩 대응해야 한다.  
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 이 함수이다.  
일대일 대응은 함수 중에 치역과 공역이 일치하는 것을 말한다.  
따라서 ㉢이 일대일 대응이다.  
 $\therefore x + y = 4$

4.  $R$  가 실수 전체의 집합일 때,  $R$  에서  $R$  로의 함수  $f$  를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a \quad (x \in R, a \in R)$$

함

수  $f$  가 일대일 대응이 되도록 하는  $a$  의 값의 범위는?

- ①  $a < -1$                       ②  $a \leq -1$                       ③  $a > -1$   
 ④  $a < 1$                           ⑤  $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$  에서  $x \geq 1$ ,  $x < 1$  인 경우로 나누면,  
 $x \geq 1$  일 때,  $f(x) = a(x-1) + (2-a)x + a$   
 $x < 1$  일 때,  $f(x) = a(1-x) + (2-a)x + a$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수  $f(x)$  가  $R$  에서  $R$  로의 일대일 대응이려면  
 $x \geq 1$  에서 기울기가 양이므로  $x < 1$  에서도 기울기가 양이어야 한다.

$$\text{즉, } -2(a-1) > 0, a-1 < 0$$

$$\therefore a < 1$$



5.  $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고,  $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수  $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수  $a$ 의 값을 하면?

① 3                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$  또는  $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로  $x \geq 7$ 을 만족하는  $x$ 의 최솟값이  $a$ 가 된다.

$\therefore a = 7$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x) = ax + |x - 2| + 3$  이 일대일 대응이 되도록 하는 상수  $a$  의 값의 범위는?

- ①  $a < -2$  또는  $a > 0$                       ②  $-1 \leq a \leq 1$   
③  $-2 < a < 2$                       ④  $a < -1$  또는  $a > 1$   
⑤  $a \geq 1$

해설

(i)  $x \geq 2$  일 때  $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a + 1)x + 1$   
(ii)  $x < 2$  일 때  $f(x) = ax - (x - 2) + 3 = (a - 1)x + 5$   
함수  $f(x)$  가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야  
하므로 (i), (ii)에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.  
따라서,  $(a + 1)(a - 1) > 0$  이므로  
 $a < -1$  또는  $a > 1$

7. 임의의 양수  $r$ 에 대하여 집합  $S_r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2, x, y \text{는 정수}\}$ 이라 하자. 집합  $S_r$ 의 원소의 개수를  $f(r)$ 이라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- I.  $f(1) + f(2) = f(\sqrt{5})$   
II.  $0 < r_1 < r_2$ 이면  $f(r_1) < f(r_2)$   
III.  $1 \leq r \leq 3$ 의 범위에서  $f(r)$ 의 최소값은 4이고 최대값은 8이다.

- ① I                      ② II                      ③ I, III  
④ II, III                ⑤ I, II, III

해설

$f(r)$ 은  $x^2 + y^2 = r^2$  위의 정수 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수이다.

I.  $r = 1$ 일 때 순서쌍은

$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ 이므로

$\therefore f(1) = 4$

$r = 2$ 일 때 순서쌍은

$(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$ 이므로

$\therefore f(2) = 4$

$r = \sqrt{5}$ 일 때 순서쌍은

$(1, 2), (2, 1), (1, -2), (2, -1), (-1, -2),$

$(-2, -1), (-1, 2), (-2, 1)$ 이므로,

$\therefore f(\sqrt{5}) = 8$

II. 반례:  $f(1) = 4, f(\sqrt{3}) = 0$

III. 반례:  $f(\sqrt{3}) = 0$

8. 삼차함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  에 대하여  $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$  로 정의 한다.

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$  일 때,  $f(4)$  의 값은 ?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$  이므로

$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$  이 된다.

즉,  $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$

이 식에  $x = 4$  를 대입하면

$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\therefore f(4) = 24$



9. 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$  는 실수값을 가지는 함수이고, 다음을 만족한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

I. 임의의 실수  $x, y$  에 대하여  
 $g(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$   
II.  $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

- ①  $g(0) = 1$

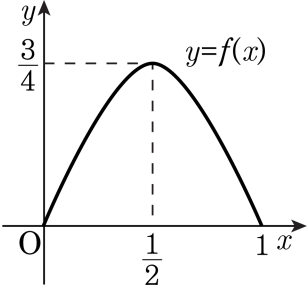
②  $g(1) = 0$
- ③  $g(2) = -1$

④  $g(-1) = -2$
- ⑤  $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 1$

해설

I. 에서  $x = y$  라 하면  
 $g(0) = \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 \dots \textcircled{1}$   
i )  $\textcircled{1}$ 에서  $x = 0$  라 하면  
 $g(0) = \{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2$   
그런데 II. 에서  $f(0) = 0$  이므로  
 $g(0) = \{g(0)\}^2 \therefore g(0) = 0, 1$   
만약,  $g(0) = 0$  라고 하면,  
 $\textcircled{1}$ 에서  $0 = \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2$  이고  
함수  $f(x), g(x)$  는 실수값을 가지는 함수이므로  
 $f(x) = 0$  가 된다.  
이것은 II. 에서  $f(1) = 1$  이라는 것에 모순이다.  
따라서  $g(0) = 1 \dots \textcircled{1}$   
 $\textcircled{1}$ 에 의해서  $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 1 \dots \textcircled{5}$   
ii )  $\textcircled{5}$ 에서  $x = 1$  라 하면  
 $1 = \{f(1)\}^2 + \{g(1)\}^2$   
그런데 II. 에서  $f(1) = 1$  이므로  
 $g(1) = 0 \dots \textcircled{2}$   
iii)  $\textcircled{5}$ 에서  $x = -1$  라 하면  
 $1 = \{f(-1)\}^2 + \{g(-1)\}^2$   
그런데 II. 에서  $f(-1) = -1$  이므로  
 $g(-1) = 0 \dots \textcircled{4}$   
I. 에서  $x = 1, y = -1$  라 하면  
 $g(2) = f(1)f(-1) + g(1)g(-1)$   
그런데 II. 에서  $f(-1) = -1, f(1) = 1$  이고,  
 $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ 에 의해  $g(1) = 0, g(-1) = 0$  이므로  
 $g(2) = -1 \dots \textcircled{3}$

10. 다음 그림은 함수  $f(x) = 3x(1 - x)$  의 그래프의 일부이다.  $0 \leq x \leq 1$  에서 함수  $y = f(f(x))$  의 치역은?



- ①  $\left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\right\}$

②  $\left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$
- ③  $\left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{9}{16}\right\}$

④  $\left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4}\right\}$

- ⑤  $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$

해설

$t = f(x) = 3x(1 - x)$  라 놓으면 아래 그림에서

$t$

$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}$

$1$

$x$

$0 \leq t \leq \frac{3}{4}$  임을 알 수 있다.  $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$  일 때,  $y = f(t)$  라 놓으면

$f(t)$

$\frac{3}{4}$

$\frac{9}{16}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}$

$t$

$0 \leq y \leq \frac{3}{4}$  임을 알 수 있다.

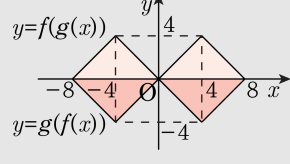
따라서,  $y = f(f(x))$ 의 치역은  $\left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{4}\right\}$  이다.

11. 함수  $f(x) = 4 - |x|$ ,  $g(x) = -4 + |x|$  에서,  $y = f(g(x))$  와  $y = g(f(x))$  로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36      ② 64      ③ 72      ④ 54      ⑤ 108

해설

- i)  $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$  에서  
 $x \geq 4$  일 때,  $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$   
 $0 \leq x < 4$  일 때,  $y = 4 + (-4 + x) = x$   
 $-4 \leq x < 0$  일 때,  $y = 4 + (-4 - x) = -x$   
 $x < -4$  일 때,  $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$   
ii)  $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$  에서  
 $x \geq 4$  일 때,  $y = -4 - (4 - x) = x - 8$   
 $0 \leq x < 4$  일 때,  $y = -4 + (4 - x) = -x$   
 $-4 \leq x < 0$  일 때,  $y = -4 + (4 + x) = x$   
 $x < -4$  일 때,  $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

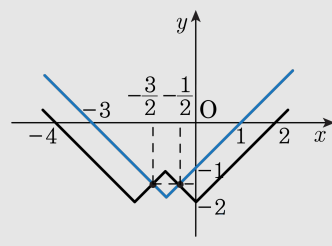
$$\therefore 8 \times 8 = 64$$

12. 함수  $f(x) = |x + 1| - 2$  에서  $f(x) = (f \circ f)(x)$  를 만족하는 실수  $x$  값들의 합을 구하면?

- ① -2      ② -1      ③  $-\frac{3}{2}$       ④ 1      ⑤ 0

해설

$f(x) = |x + 1| - 2$  에서  
 $f(f(x)) = f(|x + 1| - 2) = ||x + 1| - 2 + 1| - 2$   
 $= ||x + 1| - 1| - 2$   
 ( i )  $x \geq 0$  일 때,  $f(f(x)) = x - 2$   
 ( ii )  $-1 \leq x < 0$  일 때,  $f(f(x)) = -x - 2$   
 (iii)  $-2 \leq x < -1$  일 때,  $f(f(x)) = x$   
 (iv)  $x < -2$  일 때,  $f(f(x)) = -x - 4$   
 ( i ), ( ii ) 의 경우  $f(x) = x - 1$   
 (iii), (iv) 의 경우  $f(x) = -x - 3$



따라서 교점은  $x = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$  일 때 생기고

$f(x) = (f \circ f)(x)$  를 만족한다.

$$\therefore -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$