1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$는 항등함수이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = -2$일 때, $f(4) + g(-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$는 항등함수이므로 $f(4) = 4$

모든 x에 대하여 $g(x) = -2$이므로

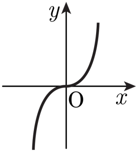
$g(x)$는 상수함수이다.

즉, $g(-1) = -2$

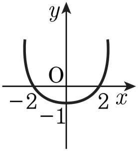
$\therefore\ f(4) + g(-1) = 4 + (-2) = 2$

2. 다음 함수의 그래프 중 일대일 대응이 아닌 것은?

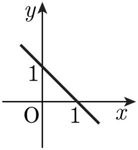
①



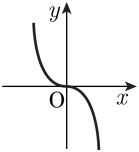
②



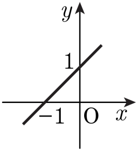
③



④



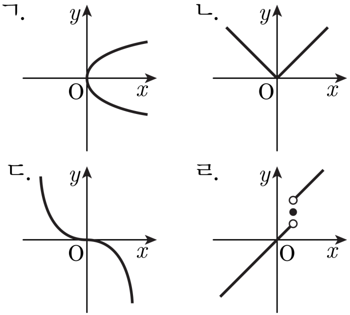
⑤



해설

치역과 공역이 같고 임의의 두 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족해야하므로 정답은 ②번이다.

3. 다음 방정식의 자취들 중 함수인 것은 x 개, 일대일 대응인 것은 y 개이다. $x+y$ 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수는 주어진 x 에 y 값이 하나씩 대응해야 한다.
따라서 ㉡, ㉢, ㉣ 이 함수이다.
일대일 대응은 함수 중에 치역과 공역이 일치하는 것을 말한다.
따라서 ㉢이 일대일 대응이다.
$\therefore \quad x+y=4$

4. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{f : x \ \rightarrow \ a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \ (x \in R,\ a \in R)}$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　② $a \leq -1$　③ $a > -1$

④ $a < 1$　⑤ $a \leq 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \geq 1,\ x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \geq 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0,\ a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

5. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$

② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$

(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로

$a < -1$ 또는 $a > 1$

7. 임의의 양수 r 에 대하여 집합 $S_r = \{(x,\ y) \mid x^2+y^2 = r^2,\ x,\ y$는 정수$\}$ 이라 하자. 집합 S_r 의 원소의 개수를 $f(r)$ 이라 할 때,<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

Ⅰ. $f(1)+f(2) = f(\sqrt{5})$
Ⅱ. $0 < r_1 < r_2$ 이면 $f(r_1) < f(r_2)$
Ⅲ. $1 \le r \le 3$ 의 범위에서 $f(r)$ 의 최소값은 4 이고 최대값은 8 이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

$f(r)$ 은 $x^2+y^2 = r^2$ 위의 정수 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수이다.
Ⅰ. $r=1$ 일 때 순서쌍은
$(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1)$ 이므로
$\therefore f(1) = 4$
$r=2$ 일 때 순서쌍은
$(2,0),\ (0,2),\ (-2,0),\ (0,-2)$ 이므로
$\therefore f(2) = 4$
$r = \sqrt{5}$ 일 때 순서쌍은
$(1,2),\ (2,1),\ (1,-2),\ (2,-1), (-1,-2),$
$(-2,-1),\ (-1,2),\ (-2,1)$ 이므로,
$\therefore\ f(\sqrt{5}) = 8$
Ⅱ. 반례 : $f(1) = 4,\quad f(\sqrt{3}) = 0$
Ⅲ. 반례 : $f(\sqrt{3}) = 0$

8. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$ 로 정의 한다.
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 이므로
$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.
즉, $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$
이 식에 $x = 4$ 를 대입하면
$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$\therefore f(4) = 24$

9. 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이고, 다음을 만족한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

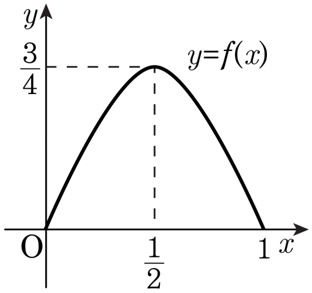
Ⅰ. 임의의 실수 x, y 에 대하여
$g(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$
Ⅱ. $f(-1)=-1,\ f(0)=0,\ f(1)=1$

① $g(0)=1$
② $g(1)=0$
③ $g(2)=-1$
④ $g(-1)=-2$
⑤ $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$

해설

Ⅰ. 에서 $x=y$ 라 하면
$g(0)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2 \ \cdots$ ㉠
ⅰ) ㉠에서 $x=0$ 라 하면
$$g(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2$$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(0)=0$ 이므로
$g(0)=\{g(0)\}^2 \qquad \therefore\ g(0)=0,\ 1$
만약, $g(0)=0$ 라고 하면,
㉠에서 $0=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ 이고
함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수값을 가지는 함수이므로
$f(x)=0$ 가 된다.
이것은 Ⅱ. 에서 $f(1)=1$ 이라는 것에 모순이다.
따라서 $g(0)=1 \ \cdots$ ①
㉠에 의해서 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1 \ \cdots$ ⑤
ⅱ) ⑤에서 $x=1$ 라 하면
$$1=\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2$$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(1)=1$ 이므로
$g(1)=0 \ \cdots$ ②
ⅲ) ⑤에서 $x=-1$ 라 하면
$$1=\{f(-1)\}^2+\{g(-1)\}^2$$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(-1)=-1$ 이므로
$g(-1)=0 \ \cdots$ ④
Ⅰ. 에서 $x=1$, $y=-1$ 라 하면
$g(2)=f(1)f(-1)+g(1)g(-1)$
그런데 Ⅱ. 에서 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$ 이고,
②, ④에 의해 $g(1)=0$, $g(-1)=0$ 이므로
$g(2)=-1 \ \cdots$ ③

10. 다음 그림은 함수 $f(x)=3x(1-x)$ 의 그래프의 일부이다. $0 \le x \le 1$ 에서 함수 $y=f(f(x))$ 의 치역은?



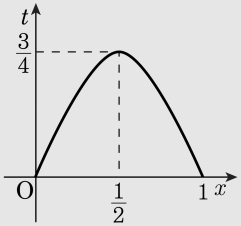
① $\left\{y \mid 0 \le y \le \frac{1}{4}\right\}$ ② $\left\{y \mid 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$

③ $\left\{y \mid 0 \le y \le \frac{9}{16}\right\}$ ④ $\left\{y \mid 0 \le y \le \frac{3}{4}\right\}$

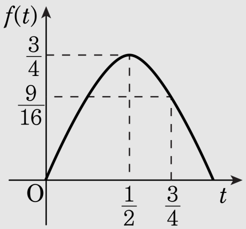
⑤ $\{y \mid 0 \le y \le 1\}$

해설

$t=f(x)=3x(1-x)$ 라 놓으면 아래 그림에서



$0 \le t \le \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다. $0 \le t \le \frac{3}{4}$ 일 때, $y=f(t)$ 라 놓으면



$0 \le y \le \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다.

따라서, $y=f(f(x))$ 의 치역은 $\left\{y \,\middle|\, 0 \le y \le \frac{3}{4}\right\}$ 이다.

11. 함수 $f(x)=4-|x|,\ g(x)=-4+|x|$ 에서, $y=f(g(x))$ 와 $y=g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y=f(g(x))=4-|-4+|x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y=4-(-4+x)=-x+8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y=4+(-4+x)=x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y=4+(-4-x)=-x$

$x < -4$ 일 때, $y=4-(-4-x)=x+8$

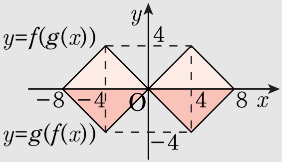
ii) $y=g(f(x))=-4+|4-|x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y=-4-(4-x)=x-8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y=-4+(4-x)=-x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y=-4+(4+x)=x$

$x < -4$ 일 때, $y=-4-(4+x)=-x-8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore\ 8 \times 8 = 64$

12. 함수 $f(x)=|x+1|-2$ 에서 $f(x)=(f\circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ 0

해설

$f(x)=|x+1|-2$ 에서

$f(f(x))=f(|x+1|-2)=||x+1|-2+1|-2$

$=||x+1|-1|-2$

(i) $x\ge 0$ 일 때, $f(f(x))=x-2$

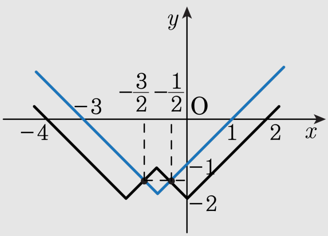
(ii) $-1\le x<0$ 일 때, $f(f(x))=-x-2$

(iii) $-2\le x<-1$ 일 때, $f(f(x))=x$

(iv) $x<-2$ 일 때, $f(f(x))=-x-4$

(i), (ii)의 경우 $f(x)=x-1$

(iii), (iv)의 경우 $f(x)=-x-3$



따라서 교점은 $x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x)=(f\circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$