

1. 두 집합 A, B 에 대하여 $B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 이고, $A \cup B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{이하의 홀수}\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 합은?

- ① 4 ② 5 ③ 13 ④ 16 ⑤ 20

해설

$B = \{1, 2, 3, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$

A

B

4

12

1

3

2

6

$\therefore A = \{1, 3, 4, 12\}$
따라서 집합 A 의 원소의 합은 $1 + 3 + 4 + 12 = 20$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{k | k = xy, x \in A, y \in A\}$ 일 때, 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

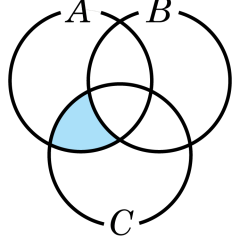
해설

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$ $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ 이다.

$\therefore B - A = \{2, 4\}$

$\therefore 2 + 4 = 6$

3. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A \cup B \cup C$
- ② $C - (A \cup B)$
- ③ $(A \cup C) - B$
- ④ $(B \cup C) - A$
- ⑤ $(A \cap C) - B$

해설

①

②

③

④

⑤

4. 함수 $f(x) = ax + 3$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같아지도록 하는 상수 a 의 값은 얼마인가?

- ① -3 ② -1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = ax + 3$ 으로 놓고 x, y 를 서로 바꾸면

$$x = ay + 3, y = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

$f(x) = f^{-1}(x)$ 에서

$$ax + 3 = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

위의 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$a = \frac{1}{a}, 3 = -\frac{3}{a}$$

$\therefore a = -1$

해설

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이면 $(f \circ f)(x)$ 이므로

$(f \circ f)(x) = I(x) = x$ 가 성립한다.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3) = a(ax + 3) + 3$$
$$= a^2x + 3a + 3$$

$a^2x + 3a + 3 = x$ 에서 $a^2 = 1, 3a + 3 = 0$

$\therefore a = -1$

5. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{x, y\} \subset \{y, x, z\}$
- ② $\{\emptyset\} \subset \{4, \{4, \emptyset\}\}$
- ③ $\{4, 8\} \subset \{4, 4 \times 2\}$
- ④ $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
- ⑤ $\emptyset \subset \emptyset$

해설

- ② $\{\emptyset\} \not\subset \{4, \{4, \emptyset\}\}$

6. 두 집합 $A = \{2, 4, a-1\}$, $B = \{a-8, a-3, b+2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 9\}$ 일 때, 집합 A 와 집합 B 의 합집합은?

① $\{2, 4, 8\}$

② $\{2, 4, 7, 9\}$

③ $\{2, 4, 8, 9\}$

④ $\{2, 4, 7, 8, 9\}$

⑤ $\{2, 4, 7, 9, 11\}$

해설

$A \cap B = \{2, 9\}$ 이므로 $9 \in A$
 $a-1=9 \therefore a=10$
 $a=10$ 이므로 $B = \{2, 7, b+2\}$
 $9 \in B$ 이므로 $b+2=9 \therefore b=7$
 $A = \{2, 4, 9\}$, $B = \{2, 7, 9\}$ 이므로
 $A \cup B = \{2, 4, 7, 9\}$

7. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 a 의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$ 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 동치임을 이용
 $\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.
 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$,
 $x = -3, 1$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.
1) $x = -3 : 9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$
2) $x = 1 : 1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$
 $\therefore -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

8. 다음은 ‘ a, b, c 가 자연수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’임을 증명한 것이다.

a, b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2 + b^2 = 3M + (\text{나})$ (단, M 은 자연수) $\cdots \text{㉠}$
또, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M'' + (\text{다})$ (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M + (\text{나})$ 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

- ① 자연수, 1, 2
- ② 자연수, 2, 1
- ③ 3의 배수, 1, 2
- ④ 3의 배수, 2, 1
- ⑤ 3의 배수, 2, 2

해설

a, b 가 모두 3의 배수가 아니라고 가정하면
 $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2 + b^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3(3(m^2 + n^2) \pm 2(m + n)) + 2 = 3M + 2$ (단, M 은 자연수) $\cdots \cdots \text{㉠}$
한편, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로
 $c^2 = 9l^2$ 또는 $c^2 = (3l \pm 1)^2 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$
즉, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M + 1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M + 2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

9. 자연수 n 에 대하여 $n(n+1)(n+2)$ 의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(1) = 6, f(2) = 4$ 이다. 이 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$$n = 1 \text{ 이면 } 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad \therefore f(1) = 6$$

$$n = 2 \text{ 이면 } 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad \therefore f(2) = 4$$

$$n = 3 \text{ 이면 } 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \quad \therefore f(3) = 0$$

$$n = 4 \text{ 이면 } 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \quad \therefore f(4) = 0$$

$$n = 5 \text{ 이면 } 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \quad \therefore f(5) = 0$$

$$n = 6 \text{ 이면 } 6 \cdot 7 \cdot 8 = \times \times 6 \quad \therefore f(6) = 6$$

$$n = 7 \text{ 이면 } 7 \cdot 8 \cdot 9 = \times \times 4 \quad \therefore f(7) = 4$$

$$n = 8 \text{ 이면 } 8 \cdot 9 \cdot 10 = \times \times 0 \quad \therefore f(8) = 0$$

⋮

따라서 6, 4, 0, 0, 0 이 반복하여 나타남을 알 수 있다.

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) = (6 + 4 + 0 + 0 + 0) \times 4 = 40$$

10. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

11. 두 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2}$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(k \circ f)(x) = g(x)$ 을 만족하는 $k\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 을 구하면?

① $3x-2$

② $6x-5$

③ $2x-3$

④ $x+1$

⑤ $4x+1$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x) \Rightarrow k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$f^{-1}(x)$ 를 구해보면

$$y = \frac{x+2}{2}, x = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = 2x-2 \cdots f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow k(x) = g(f^{-1}(x)) = 3(2x-2) + 1 = 6x-5$$

$$\therefore k\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6\left(\frac{x+1}{2}\right) - 5 = 3x-2$$

12. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$ 의 부분집합을 X 라고 하자. 집합 X 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

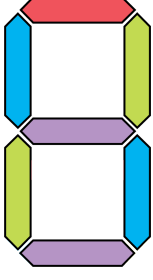
해설

$$A = \{1, 2, 4\}$$

$$X : \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \\ \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$$

집합 X 의 원소들의 합에는 1, 2, 4가 각각 4번씩 더해지므로
 $(1 + 2 + 4) \times 4 = 28$

13. 다음 그림과 같이 빨강, 초록, 파랑, 보라 4개의 전등으로 구성된 숫자판이 있다. 세 집합 A, B, C 가 각각 다음과 같을 때, $\square$ 안에 기호 $\subset, =$ 중 알맞은 것을 차례대로 써넣어라.



$A = \{x \mid x$
는 숫자 4를 나타낼 때 켜지는 전등의 색}
 $B = \{x \mid x$
는 숫자 5를 나타낼 때 켜지는 전등의 색}
 $C = \{x \mid x$
는 숫자 6을 나타낼 때 켜지는 전등의 색 }

$A \square C$

$B \square C$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\subset$

▷ 정답 : $\subset$

해설

집합 A, B, C 를 각각 원소나열법으로 나타내면
 $A = \{\text{파랑, 보라, 초록}\}$,
 $B = \{\text{빨강, 파랑, 보라}\}$,
 $C = \{\text{빨강, 파랑, 보라, 초록}\}$ 이다.
따라서 $A \subset C, B \subset C$ 이다.

14. 집합 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$ 의 부분집합 중에서 4의 약수를 모두 포함하는 부분집합의 개수가 64개일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

4의 약수 : 1, 2, 4

집합 A 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이므로 원소 1, 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{n+1-3} = 64 = 2^6$ 이다.

$n+1-3=6 \quad \therefore n=8$

15. 함수 $y = |x - 2| + |x + 1|$ 이 $x = m$ 일 때, 최솟값을 갖는다. 이를 만족시키는 정수 m 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = |x - 2| + |x + 1|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$y = -(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$$

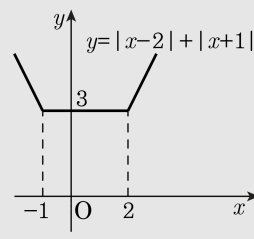
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$y = -(x - 2) + (x + 1)$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$y = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1 = 3$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로 y 의 최솟값은 3 이고 이때, 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4 개다.



16. 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x 에 대하여 다음의 조건을 만족시킬 때, $f(2012)$ 의 값과 같은 것은?

I. $f(-x) = f(x)$
II. $f(x) = f(10 - x)$

- ① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $f(2)$ ④ $f(3)$ ⑤ $f(4)$

해설

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$ 는 y 축에 대칭이고,
 $f(x) = f(10 - x) \Leftrightarrow y = f(x)$ 는
 $x = 5$ 에 대칭이다.
따라서 함수 $y = f(x)$ 는 주기가 10이고,
 $2012 = 201 \times 10 + 2$ 이므로
 $f(2012) = f(201 \times 10 + 2) = f(2)$

17. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x|x < 10\}$, $B = \{x|x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로
 $A = \{x|x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B = \{x|x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\} = \{2, 4, 5, 7, 8\}$,
 $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 6, 9\}$,
따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

18. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?
- 민주: 한결이가 빠졌어.
한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하: 민주가 빠졌어.
겨레: 나는 안 빠졌어.
- ① 겨레, 한결 ② 겨레, 민주 ③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결 ⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉤ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

19. 어느 학생이 x, y, z 의 평균 A 를 구하기 위하여 x, y 의 평균 C 를 먼저 구하고, C 와 z 의 평균 B 를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?

(단, $x < y < z$)

① $B = A$

② $B < A$

③ $B > A$

④ $B \leq A$

⑤ $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3}, C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z - x - y}{12} = \frac{(z - x) + (z - y)}{12} > 0$$

$$\therefore B > A$$

20. $a > 0, b > 0$ 이고 $x = a + \frac{1}{b}, y = b + \frac{1}{a}$ 이라 할 때, $x^2 + y^2$ 의
최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^2 + y^2 = \left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(b^2 + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$$

(등호는 $a^2 = \frac{1}{a^2}$ 일 때)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

(등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 일 때)

$$b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 2$$

(등호는 $b^2 = \frac{1}{b^2}$ 일 때)

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8$$

따라서, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 8이다.