

1. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$$p : a, b \text{는 모두 짝수} \quad q : a + b \text{는 짝수}$$

▶ 답: 조건

▶ 정답 : 충분조건

해설

a, b 는 모두 짝수 $\rightarrow a + b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
 $a = 2m, b = 2n$ (n, m 은 자연수) 이면,
 $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$ 이므로 짝수이다.
 한편, $a = 3, b = 3$ 일 때 $a + b = 6$ 이므로 짝수이지만, a, b 는
 모두 홀수이다.
 $\therefore p$ 는 q 의 충분조건이다.

2. $p : x = 3$, $q : x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설
조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0, 3\}$
이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P \therefore$ 충분조건

3. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

- ① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

4. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

5. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를
바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$
- ② $A < C < B$
- ③ $B < A < C$
- ④ $C < A < B$
- ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로
 A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.
 $A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
 $B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$
 $C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$
이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

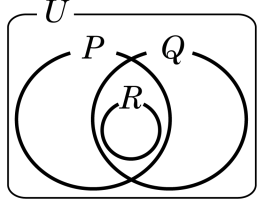
6. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고 $\sim p$ 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $P - Q = \emptyset$ ② $P \cap Q = Q$ ③ $P \cap Q = P$
④ $P^c = Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p$ 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $\sim p \rightarrow \sim q$ 이고, 대우 $q \rightarrow p$ 는 참이다. 따라서, 두 진리집합 사이에는 $Q \subset P$ 가 성립하므로 $P \cap Q = Q$

7. 전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 이 집합의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



- ① r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ② $\sim r$ 는 $\sim p$ 또는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.
- ③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.
- ④ r 는 p 이고 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤ $\sim r$ 는 p 이고 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$R \subset (P \cup Q), R \subset (P \cap Q)$ 이므로

- ① r 는 p 또는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.

8. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

9. 부등식 $a^2 + b^2 > 2(a + b - 1)$ 이 성립하지 않도록 하는 실수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

준식을 정리하면

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 > 0, (a - 1)^2 + (b - 1)^2 > 0$$

따라서 $a = 1, b = 1$ 일 때만 이 부등식이 성립하지 않는다.

$$\therefore a + b = 2$$

10. 다음 [보기] 중에 x 에 대한 절대부등식인 것을 모두 고른 것은? (단, x 는 실수이다.)

보기

㉠ $x + 1 > 0$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

㉢ $x^2 < x + 12$

㉣ $x^2 + 1 > x$

① ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

㉡ $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

㉢ $x^2 < x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$

$\Leftrightarrow -3 < x < 4$

㉣ $x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} > 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

$\Leftrightarrow x$ 는 모든 실수(절대부등식)

11. a, b, c, d, x, y, z 가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

- ㉠ $a^2 + b^2 \geq ab$
- ㉡ $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$
- ㉢ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$
- ㉤ $|a + b| \leq |a| + |b|$
- ㉥ $|a| - |b| \geq |a - b|$
- ㉦ $|a + b| \geq |a| - |b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉦

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

- ㉠ $a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$
 $= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
 $\therefore a^2 + b^2 \geq ab$: 맞음
- ㉡ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$
 $= a^2 - 2a + b^2 - 2b + 3$
 $= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$
 $\therefore a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$: 틀림
- ㉢ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$
 $= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$
 $+ b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx)$
 $= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$
 $\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$: 틀림
- ㉤ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)
 $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0 (\because |ab| \geq ab)$
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 맞음
- ㉥ 제곱의 차 비교
 $(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$
 $= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
 $= -2|ab| + 2ab \leq 0 (\because |ab| \geq ab)$
 $\therefore |a| - |b| \leq |a - b|$: 틀림
- ㉦ $|a + b|^2 - (|a| - |b|)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$
 $= 2ab + 2|ab| \geq 0$
 $\therefore |a + b| \geq |a| - |b|$: 맞음

12. 두 사람 갑, 을이 같은 거리를 여행하는데, 갑은 거리의 반을 a 의 속력으로, 나머지 거리를 b 의 속력으로 가고, 을은 총 걸린 시간 중 반을 a 의 속력으로, 나머지 시간을 b 의 속력으로 갔다. 각각의 평균속력을 A, B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① $A \leq B$ ② $A \geq B$ ③ $A = B$
④ $A < B$ ⑤ $A > B$

해설

거리를 l 이라 하고, 갑이 걸린 시간을 t_1 이라 하면

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{b}$$

따라서 A의 평균속력은

$$A = \frac{l}{t_1} = \frac{l}{\frac{l}{2a} + \frac{l}{2b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

또, 을의 평균속력은 $B = \frac{1}{2}(a+b)$

그런데, $\frac{1}{2}(a+b) \geq \frac{2ab}{a+b}$ 이므로

$$B \geq A$$

13. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이때, $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3([가])$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore S \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$
(단, 등호는 $([나])$ 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

- ① $abc, a=b=c=1$
- ② $\sqrt[3]{abc}, a=2$ 이고 $b=c$
- ③ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=1$
- ④ $abc, a=b$ 이고 $c=2$
- ⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2, a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 을 전개하면
 $1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$
이 때 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $ab+bc+ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)
 $\therefore 8 \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3(\sqrt[3]{abc})^2 + abc$
 $= (1 + \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq 2, \quad abc \leq 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$ 일 때 성립)

14. 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하고 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ 라 할 때,

$(s - a)(s - b)(s - c) \leq kabc$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$$s - a = \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(-a + b + c) > 0$$

($\because a, b, c$ 는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s - b > 0, s - c > 0$

(산술평균) $\geq$ (기하평균)이므로

$$2\sqrt{(s - a)(s - b)} \leq (s - a) + (s - b) = c$$

(등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - b)(s - c)} \leq (s - b) + (s - c) = a$$

(등호는 $b = c$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - c)(s - a)} \leq (s - c) + (s - a) = b$$

(등호는 $c = a$ 일 때 성립)

$$\text{변변 곱하면 } 8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$$

$$\therefore (s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{1}{8}abc$$

(등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$\therefore k = \frac{1}{8}$$

15. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

ab 와 $\frac{4}{ab}$ 가 양수이므로

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

$$\therefore ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5 = 9$$

16. $x > 0, y > 0$ 일 때, $4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 0, y > 0$ 일 때 $4x + y \geq 2\sqrt{4xy}$ 이므로

$$\begin{aligned} 4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} &\geq 2\sqrt{4xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \\ &\geq 2\sqrt{4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}} = 4 \end{aligned}$$

$\therefore 4x + y + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4$, 최솟값 4

17. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right)$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & (a-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b}\right) \\ &= 5 - \left(\frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \leq 5 - 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 1 \end{aligned}$$