1. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.
② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.
③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
④ x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.
⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례 : $x = 4$

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $a < b$이면 $a + c > b + c$

② $a < b$이면 $a - c > b - c$

③ $a < b$이고 $c > 0$이면 $ac > bc$

④ $a < b$이고 $c > 0$이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $ac < bc$이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

i) 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a > b,\ a = b,\ a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
ii) $a > b,\ b > c$ 이면 $a > c$
iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
iv) $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc$
v) $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc$
따라서 참인 것은 ④이다.

3. 전체집합 U에 대하여 두 조건 $p,\ q$를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, $p \nRightarrow q$에 해당하는 사례들이 속하는 집합은?

① $P^c \cup Q$　　② $P \cup Q^c$　　③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$　　⑤ $P \cap Q^c$

해설

주어진 명제가 거짓이 되는 반례들이 속하는 집합으로 $P - Q = P \cap Q^c$

4. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 'p 이면 q 이다.' 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

① P ② Q ③ $P-Q$ ④ P^c ⑤ Q^c

해설

만약 'p 이면 q 이다.' 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 'p 이면 q 이다' 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

5. 명제 'x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.' 는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$ ② $x = 12$ ③ $x = 10$
④ $x = 8$ ⑤ $x = 4$

해설
가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

6. 두 조건 $p(x)$: $|x-a| \le 1$, $q(x)$: $-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5 개 ② 4 개 ③ 3 개 ④ 2 개 ⑤ 1 개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x | a-1 \le x \le a+1\}$, $Q = \{x | -1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a-1$ 이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots$ ㉠

(ii) $3 \le a-1$ 이고 $a+1 \le 5$, 즉 $a = 4 \cdots$ ㉡

㉠ , ㉡ 에서 정수 a는 4뿐이므로 1개이다.

7. $|x-3| \le 7$ 은 $|x-2| \le a$ 이기 위한 필요조건이고 $x \le b$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?(단, $b > 0$)

① 16　　② 18　　③ 20　　④ 22　　⑤ 24

해설

$|x-3| \le 7$ 을 만족하는 집합을 P,
$|x-2| \le a$ 을 만족하는 집합을 Q,
$x \le b$ 를 만족하는 집합을 R 이라 하면,
$P \subset R$ 이므로 $Q \subset P$
즉 $Q \subset P \subset R$ 이다.
따라서 Q 는 $-a \le x-2 \le a$ 에서
$2-a \le x \le a+2$, P 는 $-4 \le x \le 10$,
R 은 $x \le b$ 이므로
$2-a \ge -4$, $a+2 \le 10$ 이므로
$a \le 6$, $a \le 8$ 에서 $a \le 6$ 이므로
a 의 최댓값은 6,
또한 $b \le 10$ 이므로 b 의 최솟값은 10
따라서 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은 16

8. 두 조건 $p : |x-h| \le 1, q : -3 \le x \le 6$에 대하여 p 가 q이기 위한 충분조건일 때, 정수 h 의 개수는?

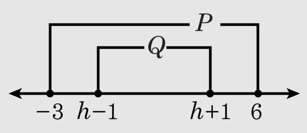
① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$P = \{x \mid h-1 \le x \le h+1\}$

$Q = \{x \mid -3 \le x \le 6\}$

$p \rightarrow q$(참) $\Rightarrow P \subset Q$



$-3 \le h-1, \quad h+1 \le 6$

$\therefore -2 \le h \le 5$

따라서 정수 h의 개수는 8개이다.

9. $x \geq a$가 $-1 < x < 1$의 필요조건이 되기 위한 a의 최댓값을 구하면?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -5

해설

$\{x | -1 < x < 1\} \subset \{x | x \geq a\}$ 이어야 하므로 $a \leq -1$
따라서, a의 최댓값은 -1이다.

10. $x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이고, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \le -1$은 $x \le a$이기 위한 필요조건이므로
「$x \le a$ 이면 $x \le -1$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ a \le -1$
또, $x \ge b$는 $x \ge 3$이기 위한 충분조건이므로
「$x \ge b$ 이면 $x \ge 3$ 이다.」가 참이어야 한다.
$\therefore\ b \ge 3$
따라서, a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 3이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$이다.

11. $x \geq a$ 가 $-2 \leq x-1 \leq 2$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a 의 최댓값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-1 \leq x \leq 3$ 이므로 $a \leq -1$ 이어야 한다.

12. 두 조건 $p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에 대하여 q 가 p 이기 위한 충분조건일 때, k 의 최솟값을 a, h 의 최댓값을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에서
p 를 다시 정리해 보면
$p : -1 < x < 1$ 이 된다.
q가 p 의 범위에 포함되어야 하므로 h 의 최댓값은 1, k 의 최솟값은 -1 이 된다.
$a = -1$, $b = 1$
$\therefore\ ab = -1$

13. 세 조건 $p : |x| < 1, q : x > a, r : x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $1 < a < 2$　　② $1 \le a \le 2$

③ $a < 1$ 또는 $a > 2$　　④ $a \le 1$ 또는 $a \ge 2$

⑤ $a > 0$

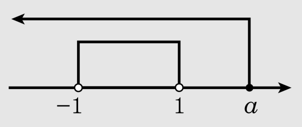
해설

$p : |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

p는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로

$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \le a\}$

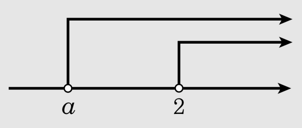
$\therefore a \ge 1 \cdots$ ㉠



q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$

$\therefore a \le 2 \cdots$ ㉡



따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \le a \le 2$

14. 다음 두 조건 $p : 2 \le x \le 5,\ q : x \ge a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \le x \le 5$ 를 만족하는 영역은 $x \ge a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \le 2$
따라서 a의 최댓값은 2

15. 다음<보기1>의 명제와<보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
Ⅱ. $A \subset B$ 와 동치이다.
Ⅲ. $A \cap B = \phi$ 와 동치이다.

보기2

가. $A \cap (A \cup B) = A$
나. $A \cap B = A$
다. $A \cap B^c = A$

① Ⅰ-가, Ⅱ-나, Ⅲ-다　　② Ⅰ-가, Ⅱ-다, Ⅲ-나
③ Ⅰ-나, Ⅱ-가, Ⅲ-다　　④ Ⅰ-나, Ⅱ-다, Ⅲ-가
⑤ Ⅰ-다, Ⅱ-가, Ⅲ-나

해설

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$
　$\therefore\ A \cap (A \cup B) = A$
　따라서 Ⅰ-가
Ⅱ. $A \subset B \iff A \cap B = A$ 따라서, Ⅱ -나
Ⅲ. $A \cap B^c = A \iff A \cap B = \phi$ 따라서, Ⅲ -다

16. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 P, Q, R 이라 할 때, $P-Q=R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $r \rightarrow \ \sim q$	㉡ $r \rightarrow p$	㉢ $r \rightarrow q$
㉣ $\sim r \rightarrow \ \sim p$	㉤ $p \rightarrow q$	

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉠, ㉤
④ ㉢, ㉣, ㉤　　⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

$P-Q=R$
따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면
$Q=R^c, R=Q^c$ 이 된다.
이를 명제로 표현하면 $r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㉠, ㉡이다.

17. 전체집합을 U , 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 두 집합 P, Q 는 $P \cap Q^c = \varnothing$, $Q^c \subset P$ 를 만족한다. 다음 중에서 참인 명제를 모두 고르면?

㉠ p 이면 $\sim q$ 이다.	㉡ p 이면 q 이다.
㉢ $\sim q$ 이면 p 이다.	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$P \cap Q^c = \varnothing$에서 $Q^c \subset P$이므로
$P \cap Q^c = Q^c = \varnothing$
$\therefore\ Q = u$
㉠ $Q^c = \varnothing$이므로 $P \not\subset Q^c$이고
$p \to \sim q$는 거짓이다.
㉡ $Q = V$이므로 $P \subset Q$이고
$p \to q$는 참이다.
㉢ $Q^c = \varnothing$이고 $Q^c \subset P$이고
$\sim q \to \sim p$는 참이다.

18. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참　　② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참

③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참　　④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓

⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

19. 다음은 명제「a, b, c가 양의 정수일 때, $a^2+b^2=c^2$이면 a, b, c중 적어도 하나는 짝수이다.」의 증명이다.

증명

주어진 명제의 대우는「a, b, c가 양의 정수일 때, a, b, c가 (가)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」a, b, c 가 (가)이면, a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수이므로 a^2+b^2 은 (나), c^2 은 (다)가 되어 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 적어도 하나는 홀수, 홀수, 짝수

② 적어도 하나는 홀수, 짝수, 홀수

③ 모두 홀수, 홀수, 짝수

④ 모두 홀수, 짝수, 홀수

⑤ 모두 짝수, 홀수, 짝수

해설

'a, b, c중 적어도 하나는 짝수이다.'의 부정은 'a, b, c 모두 홀수이다.' 따라서 주어진 명제의 대우는「a, b, c 가 양의 정수일 때, a, b, c 가 (모두 홀수)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」a, b, c 가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수 a^2+b^2 은 (홀수)+(홀수)로 (짝수), c^2 은 (홀수)이므로 $a^2+b^2 \neq c^2$

20. 다음은 ‘a, b, c 가 자연수일 때, $a^2+b^2=c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’ 임을 증명한 것이다.

a, b 가 모두 (가) 가 아니라고 가정하면, $a=3m\pm1, b=3n\pm1$ (단, m, n 은 자연수) 로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2+b^2=3M+$(나) (단, M 은 자연수) $\cdots$ ㉠ 또, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수) 라 하면, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M''+$(다) (단, M', M'' 은 자연수) 가 되어 ㉠의 $3M+$(나) 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 자연수, 1, 2
② 자연수, 2, 1
③ 3 의 배수, 1, 2
④ 3 의 배수, 2, 1
⑤ 3 의 배수, 2, 2

해설

a, b가 모두 3 의 배수가 아니라고 가정하면
$a=3m\pm1$, $b=3n\pm1$ (단, m, n 은 자연수) 로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2+b^2=(3m\pm1)^2+(3n\pm1)^2=3\{3(m^2+n^2)\pm2(m+n)\}+2$
$=3M+2$ (단, M은 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수) 로 놓을 수 있으므로
$c^2=9l^2$ 또는 $c^2=(3l\pm1)^2=3(3l^2\pm2l)+1$
즉, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M+1$ (단, M', M 은 자연수) 의 꼴이 되어 ㉠의 $3M+2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

21. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$　② $P - Q = \varnothing$　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

22. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$　② $Q \subset P$　③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$　⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면,$P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

23. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P-(P-Q)=P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.

⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$P-(P-Q)=P-(P\cap Q^c)=P\cap(P\cap Q^c)^c$
$=P\cap(P^c\cup Q)=(P\cap P^c)\cup(P\cap Q)=P\cap Q=P$ 이므로
$P\subset Q$ 이고 $p\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

24. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $ab = 0$ ㉡ $a^2 + b^2 = 0$
㉢ $a^2 + b^2 > 0$ ㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$
㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$ ㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ ㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦
④ ㉥와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$
$a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$
$a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
$ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

25. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cap B \neq \varnothing$ ③ $A \cap B = A$
④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

$(A \cup B) - A = \varnothing \iff A \cup B = A$

26. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cup B = U$　③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$　⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B-A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$
에서 $A^c = B$
즉, $A = B^c$