

1. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.

② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.

③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.

④ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다.

⑤ $(x - 3)(y - 5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례 : $x = 4$

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $a < b$ 이면 $a + c > b + c$

② $a < b$ 이면 $a - c > b - c$

③ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $ac > bc$

④ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $ac < bc$ 이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

i) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b$, $a = b$, $a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.

ii) $a > b$, $b > c$ 이면 $a > c$

iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$

iv) $a > b$, $c > 0$ 이면 $ac > bc$

v) $a > b$, $c < 0$ 이면 $ac < bc$

따라서 참인 것은 ④이다.

3. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $p \neq q$ 에 해당하는 사례들이 속하는 집합은?

① $P^c \cup Q$

② $P \cup Q^c$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

주어진 명제가 거짓이 되는 반례들이 속하는 집합으로 $P - Q = P \cap Q^c$

4. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 ' p 이면 q 이다.' 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

- ① P ② Q ③ $P - Q$ ④ P^c ⑤ Q^c

해설

만약 ' p 이면 q 이다.' 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 ' p 이면 q 이다' 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

5. 명제 ‘ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.’는 거짓이다.
다음 중에서 반례인 것은?

① $x = 1$

② $x = 12$

③ $x = 10$

④ $x = 8$

⑤ $x = 4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다.
즉, $x = 10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

6. 두 조건 $p(x) : |x - a| \leq 1$, $q(x) : -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5개

② 4개

③ 3개

④ 2개

⑤ 1개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $P = \{x | a-1 \leq x \leq a+1\}$, $Q = \{x | -1 < x < 2, 3 \leq x \leq 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a-1$ 이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots \textcircled{㉠}$

(ii) $3 \leq a-1$ 이고 $a+1 \leq 5$, 즉 $a = 4 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 정수 a 는 4뿐이므로 1개이다.

7. $|x-3| \leq 7$ 은 $|x-2| \leq a$ 이기 위한 필요조건이고 $x \leq b$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?(단, $b > 0$)

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

$|x-3| \leq 7$ 을 만족하는 집합을 P ,
 $|x-2| \leq a$ 을 만족하는 집합을 Q ,
 $x \leq b$ 를 만족하는 집합을 R 이라 하면,

$P \subset R$ 이므로 $Q \subset P$

즉 $Q \subset P \subset R$ 이다.

따라서 Q 는 $-a \leq x-2 \leq a$ 에서
 $2-a \leq x \leq a+2$, P 는 $-4 \leq x \leq 10$,

R 은 $x \leq b$ 이므로

$2-a \geq -4$, $a+2 \leq 10$ 이므로

$a \leq 6$, $a \leq 8$ 에서 $a \leq 6$ 이므로

a 의 최댓값은 6,

또한 $b \leq 10$ 이므로 b 의 최솟값은 10

따라서 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은 16

8. 두 조건 $p : |x - h| \leq 1, q : -3 \leq x \leq 6$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건일 때, 정수 h 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

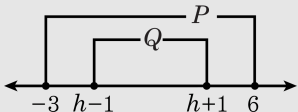
⑤ 8개

해설

$$P = \{x \mid h - 1 \leq x \leq h + 1\}$$

$$Q = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$$

$$p \rightarrow q(\text{참}) \Rightarrow P \subset Q$$



$$-3 \leq h - 1, \quad h + 1 \leq 6$$

$$\therefore -2 \leq h \leq 5$$

따라서 정수 h 의 개수는 8개이다.

9. $x \geq a$ 가 $-1 < x < 1$ 의 필요조건이 되기 위한 a 의 최댓값을 구하면 ?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ -2

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -5

해설

$\{x | -1 < x < 1\} \subset \{x | x \geq a\}$ 이어야 하므로 $a \leq -1$
따라서, a 의 최댓값은 -1 이다.

10. $x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이고, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x \leq -1$ 은 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건이므로
「 $x \leq a$ 이면 $x \leq -1$ 이다.」가 참이어야 한다.

$$\therefore a \leq -1$$

또, $x \geq b$ 는 $x \geq 3$ 이기 위한 충분조건이므로
「 $x \geq b$ 이면 $x \geq 3$ 이다.」가 참이어야 한다.

$$\therefore b \geq 3$$

따라서, a 의 최댓값은 -1 , b 의 최솟값은 3 이므로
구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

11. $x \geq a$ 가 $-2 \leq x-1 \leq 2$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a 의 최댓값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$-1 \leq x \leq 3$ 이므로 $a \leq -1$ 이어야 한다.

12. 두 조건 $p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에 대하여 q 가 p 이기 위한 충분조건일 때, k 의 최솟값을 a , h 의 최댓값을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -4

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 3

해설

$p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에서

p 를 다시 정리해 보면

$p : -1 < x < 1$ 이 된다.

q 가 p 의 범위에 포함되어야 하므로 h 의 최댓값은 1, k 의 최솟값은 -1이 된다.

$$a = -1, b = 1$$

$$\therefore ab = -1$$

13. 세 조건 $p : |x| < 1, q : x > a, r : x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $1 < a < 2$

② $1 \leq a \leq 2$

③ $a < 1$ 또는 $a > 2$

④ $a \leq 1$ 또는 $a \geq 2$

⑤ $a > 0$

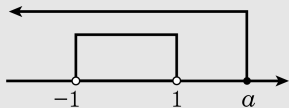
해설

$$p : |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로

$$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \leq a\}$$

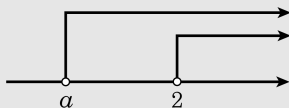
$$\therefore a \geq 1 \cdots \textcircled{㉠}$$



q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$$

$$\therefore a \leq 2 \cdots \textcircled{㉡}$$



따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \leq a \leq 2$

14. 다음 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 5$, $q : x \geq a$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \leq x \leq 5$ 를 만족하는 영역은 $x \geq a$ 를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \leq 2$ 따라서 a 의 최댓값은 2

15. 다음 <보기1>의 명제와 <보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

- I. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
II. $A \subset B$ 와 동치이다.
III. $A \cap B = \emptyset$ 와 동치이다.

보기2

- 가. $A \cap (A \cup B) = A$
나. $A \cap B = A$
다. $A \cap B^c = A$

- ① I-가, II-나, III-다 ② I-가, II-다, III-나
③ I-나, II-가, III-다 ④ I-나, II-다, III-가
⑤ I-다, II-가, III-나

해설

- I. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$
 $\therefore A \cap (A \cup B) = A$
따라서 I-가
II. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ 따라서, II-나
III. $A \cap B^c = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ 따라서, III-다

16. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 P, Q, R 이라 할 때, $P - Q = R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $r \rightarrow \sim q$

㉡ $r \rightarrow p$

㉢ $r \rightarrow q$

㉤ $\sim r \rightarrow \sim p$

㉥ $p \rightarrow q$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉥

④ ㉢, ㉤, ㉥

⑤ ㉡, ㉤, ㉥

해설

$$P - Q = R$$

따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면

$$Q = R^c, R = Q^c \text{ 이 된다.}$$

이를 명제로 표현하면 $r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㉠, ㉡이다.

17. 전체집합을 U , 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 두 집합 P, Q 는 $P \cap Q^c = \emptyset, Q^c \subset P$ 를 만족한다. 다음 중에서 참인 명제를 모두 고르면?

㉠ p 이면 $\sim q$ 이다.

㉡ p 이면 q 이다.

㉢ $\sim q$ 이면 p 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$P \cap Q^c = \emptyset$ 에서 $Q^c \subset P$ 이므로

$$P \cap Q^c = Q^c = \emptyset$$

$$\therefore Q = U$$

㉠ $Q^c = \emptyset$ 이므로 $P \not\subset Q^c$ 이고

$p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

㉡ $Q = U$ 이므로 $P \subset Q$ 이고

$p \rightarrow q$ 는 참이다.

㉢ $Q^c = \emptyset$ 이고 $Q^c \subset P$ 이고

$\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

18. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「 $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 ' $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다' 의 대우인 ' $(가)$ 이면 $x^2 + y^2 \neq 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
 (가)에서 $x^2 + y^2 > 1$ 이므로 $x^2 + y^2 \neq 1$ 가 성립한다.
 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① $x > 1$ 이고 $y > 1, 1$, 참

② $x > 1$ 이고 $y > 1, 2$, 참

③ $x > 1$ 또는 $y > 1, 2$, 참

④ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1, 1$, 거짓

⑤ $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1, 2$, 거짓

해설

$x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.

x, y 가 모두 1보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2보다 크게 된다.

또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

19. 다음은 명제 「 a, b, c 가 양의 정수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.」의 증명이다.

증명

주어진 명제의 대우는 「 a, b, c 가 양의 정수일 때, a, b, c 가 (가)이면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.」 a, b, c 가 (가)이면, a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수이므로 $a^2 + b^2$ 은 (나), c^2 은 (다)가 되어 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.

따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① 적어도 하나는 홀수, 홀수, 짝수
- ② 적어도 하나는 홀수, 짝수, 홀수
- ③ 모두 홀수, 홀수, 짝수
- ④ 모두 홀수, 짝수, 홀수
- ⑤ 모두 짝수, 홀수, 짝수

해설

「 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.」의 부정은 「 a, b, c 모두 홀수이다.」 따라서 주어진 명제의 대우는 「 a, b, c 가 양의 정수일 때, a, b, c 가 (모두 홀수)이면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이다.」 a, b, c 가 모두 홀수이면 a^2, b^2, c^2 은 모두 홀수 $a^2 + b^2$ 은 (홀수)+(홀수)로 (짝수), c^2 은 (홀수)이므로 $a^2 + b^2 \neq c^2$

20. 다음은 ‘ a, b, c 가 자연수일 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’임을 증명한 것이다.

a, b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2 + b^2 = 3M + (\text{나})$ (단, M 은 자연수) ... ㉠

또, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M'' + (\text{다})$ (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M + (\text{나})$ 의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 자연수, 1, 2

② 자연수, 2, 1

③ 3의 배수, 1, 2

④ 3의 배수, 2, 1

⑤ 3의 배수, 2, 2

해설

a, b 가 모두 3의 배수가 아니라고 가정하면

$a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 자연수)로 놓을 수 있다.

이 때, $a^2 + b^2 = (3m \pm 1)^2 + (3n \pm 1)^2 = 3\{3(m^2 + n^2) \pm 2(m+n)\} + 2 = 3M + 2$ (단, M 은 자연수) ㉠

한편, $c = 3l, 3l \pm 1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로 $c^2 = 9l^2$ 또는 $c^2 = (3l \pm 1)^2 = 3(3l^2 \pm 2l) + 1$

즉, $c^2 = 3M'$ 또는 $c^2 = 3M + 1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M + 2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a, b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

21. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

22. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. $\sim q$ 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$

② $Q \subset P$

③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$

⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$ 이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.

즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

23. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
- ⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$$P - (P - Q) = P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c$$

$$= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P$$
 이므로 $P \subset Q$ 이고 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

24. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $ab = 0$

㉡ $a^2 + b^2 = 0$

㉢ $a^2 + b^2 > 0$

㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$

㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$

㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

① ㉠과 ㉤

② ㉡와 ㉣

③ ㉢과 ㉦

④ ㉥와 ㉧

⑤ ㉣과 ㉨

해설

$$ab \leftrightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0$$

$$a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0 \text{ 이고 } b = 0$$

$$a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0$$

$$ab = 0 \text{ 이고 } b \neq 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ 이고 } b \neq 0$$

25. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 이 성립하기 위한 필요충분조건인 것은?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cap B \neq \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

$$(A \cup B) - A = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = A$$

26. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = U$

③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$

⑤ $A = B^c$

해설

$$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B, \quad B - A = A^c \cap B$$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$