

1. 두 집합 $X = \{-2, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 1$

② $x \rightarrow x^2$

③ $x \rightarrow x - 1$

④ $x \rightarrow x + 2$

⑤ $x \rightarrow 2x + 1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1, 1, 2\}$

② $\{0, 1, 4\}$

③ $\{-3, -1, 0\}$

④ $\{0, 2, 3\}$

⑤ $\{-3, 1, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④이다.

2. 다음 ()안에 알맞은 용어를 써 넣어라.

(1) 함수 $f : X \rightarrow X$ 에서 정의역 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 인 함수를 ()라고 한다.
(2) 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 원 소 x 가 Y 의 오직 하나의 원소로 대응할 때, 이 함수를 ()라고 한다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 항등함수

▷ 정답 : 상수함수



4. 두 함수 $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $(f \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$
 $\therefore (f \circ g \circ f)(1) = f(1) = 0$

5. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } (g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

6. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = -|x|$, $g(x) = -x^2$ 의 관계는?

- ① 두 함수는 상등이다. ② 두 함수는 상등이 아니다.
③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$ ④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$
⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$ $f(0) = g(0) = 0$
 $f(1) = g(1) = -1$
따라서 두 함수는 상등이다.

7. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x + 4$ ② $h(x) = 2x - 5$ ③ $h(x) = 3x + 2$
④ $h(x) = 3x + 5$ ⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면
 $h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$
 $\therefore 2a = 4, a + b = -3$
이것을 풀면 $a = 2, b = -5$
따라서 $h(x) = 2x - 5$

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

9. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

- I. $f(0) \leq f(1)$
II. $f(2) \geq f(3)$
III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- < 보기 >
- $\textcircled{\text{㉠}}$ $f(2) = 1$

$\textcircled{\text{㉡}}$ $f(3) = 3f(1)$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $f(-1) > f(1)$

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $\textcircled{\text{㉠}}$

$\textcircled{\text{㉡}}$ $\textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉢}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{㉣}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$ $\textcircled{\text{㉤}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 I, II를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 $\textcircled{\text{㉠}}$ 뿐이다.

10. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$
 $= (x+2)+1 = x+3$
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
 $= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

12. 실수 x 를 입력하면 실수 $\frac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\frac{2}{3}$ 를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-1} \text{에서}$$

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_2(-1) = \frac{2}{3}$$

$$f_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_4(-1) = \frac{2}{3} \cdots$$

$$\text{따라서 } f_{1999}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

13. 집합 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여

함수 $f: A \rightarrow A$ 를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다.

이때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, ...)

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left\{ f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$+ \left\{ f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$$

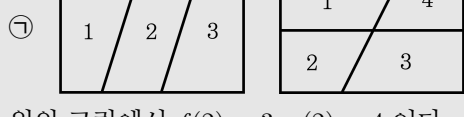
14. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

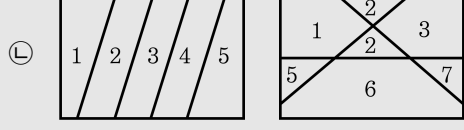
- ㉠ $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다.
- ㉡ 모든 n 에 대하여 $f(n) = n + 1$ 이다.
- ㉢ 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n + 1)$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

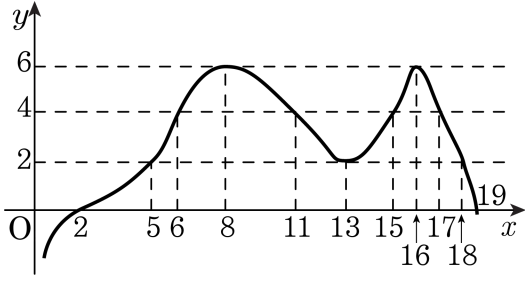


위의 그림에서 $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다. (참)



한 평면에서 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수가 최소가 되는 것은 n 개의 직선이 평행일 때이다.
즉, $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, \dots$ 이므로 $f(n) = n + 1$ (참)
㉢ [반례] $f(4) = 5, g(3) = 7$ 이므로 $g(3) > f(4)$ 이다.(거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

15. 아래 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. x 에 관한 방정식 $f(f(x+2)) = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면? (단, $x < 2$ 또는 $x > 19$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 2, 20 ② 2, 22 ③ 3, 30 ④ 4, 42 ⑤ 4, 50

해설

$f(f(x+2)) = 4$ 에서 $f(x+2) = a$ 로 놓으면
 $f(a) = 4$, $y = f(x)$ 와 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표가 a 값 이므로
 $a = 6, 11, 15, 17$
 그런데 $f(x+2) \leq 6$ 이므로 $a \leq 6$
 $\therefore a = 6$
 $f(x+2) = 6$, $x+2 = 8, 16$
 $\therefore x = 6, 14$
 $\therefore x$ 값은 2개. 합은 $6 + 14 = 20$