1. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$
② $2a+b \le a+2b$
③ $2a+b > a+2b$
④ $2a+b \ge a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설

$(2a+b)-(a+2b)=a-b>0$

$\therefore 2a+b > a+2b$

2. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)},\ \sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$
④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b)$
$= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$
(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. 두 양수 $a,\ b$에 대하여 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$a,\ b$는 양수이므로

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$

$=5+ab+\frac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$

$=5+4=9$

$\therefore$ 최솟값은 9

4. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5\cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

5. $x>y>0$인 실수 $x,\ y$에 대하여 $\frac{x}{1+x},\ \frac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x}\leq\frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x}>\frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x}\geq\frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}$

해설

$A=\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}$이라하면

$$A=\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}=\frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$=\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}>0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x}>\frac{y}{1+y}$

6. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 임을 증명하는 과정이다. [가]~[라] 에 알맞은 것을 바르게 나타낸 것은?

> $|a|+|b| \geq 0, ||a+b| \geq 0$ 이므로 $(|a|+|b|)^2$, $|a+b|^2$ 의 대소를 비교하면 된다.
> $(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
> $= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
> $= a^2 + [\text{가}] + b^2 - (a^2 + [\text{나}] + b^2)$
> $= 2([\text{다}]) \geq 0$
> (단, 등호는 $[\text{라}] \geq 0$일때성립)

① 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

② 가 : $|ab|$, 나 : ab, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

③ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $|ab| - ab$, 라 : ab

④ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : ab

⑤ 가 : $2|ab|$, 나 : $2ab$, 다 : $2|ab| - 2ab$, 라 : $2ab$

해설

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
$= 2(|ab| - ab) \geq 0$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일때성립)

7. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

8. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$
④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$xy = |xy|$
(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$
(ii) 또 $xy > 0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$
(i), (ii) 에서
$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

9. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$
② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$
③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$
④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$
⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y)-2(ax+by)$
$= ay+bx-ax-by$
$= a(y-x)-b(y-x)$
$= (a-b)(y-x)$
그런데 $a-b>0,\ y-x<0$
$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

10. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a > 0,\ b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$

③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$

④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a-b| \le |a| - |b|$

⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
$\Rightarrow\ \ 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
③ : (반례) $a = 0,\ b = 0$

11. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

12. 부등식 $3^{400} > 4^{100n}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\frac{3^{400}}{4^{100n}} = \frac{(3^4)^{100}}{(4^n)^{100}} = \left(\frac{81}{4^n}\right)^{100} > 1$$

$3^{400} > 4^{100n}$ 이므로 $\frac{81}{4^n} > 1$

$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3$

따라서 자연수 n 의 개수는 3 개이다.

13. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$(|a|+|b|+|c|)^2$
$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$
$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$
$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2$ $(\because |a||b| \geq ab)$
$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

14. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x| + |y| \geq |x - y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$(|x| + |y|)^2 - |x - y|^2$
$= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2$
$= 2(|xy| + xy) \geq 0$
$\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2$
그런데 $|x| + |y| \geq 0$, $|x - y| \geq 0$ 이므로
$|x| + |y| \geq |x - y|$ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)

① $xy > 0$　② $xy < 0$　③ $xy \geq 0$
④ $xy \leq 0$　⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.
$|xy| \geq 0$이므로
$|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

15. 모든 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x^2 + 2axy + by^2 = 0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 $a,\ b$ 의 조건은?

① $a \le b^2$　② $b^2 \le a$　③ $a^2 \le b$

④ $b \le a^2$　⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여
$x^2 + 2axy + by^2 \ge 0$ 이 성립하려면
$D/4 = (ay)^2 - by^2 = (a^2 - b)y^2 \le 0$
이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면
$y^2 \ge 0$ 이므로 $a^2 - b \le 0$
$\therefore a^2 \le b$

16. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

ㄱ $x^2 \geq 0$ ㄴ $x^3 \geq 0$

ㄷ $|x|+|y|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

ㄴ [반례] $x=-1$ 일 때, $x^3<0$ $\therefore$ 거짓

ㄷ [반례] $x=0,\ y=0$ 일 때, $|x|+|y|=0$ $\therefore$ 거짓

17. 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $A = \frac{x+y}{2}$, $G = \sqrt{xy}$, $H = \frac{2xy}{x+y}$라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $G \geq A \geq H$　　② $A \geq H \geq G$　　③ $A \geq G \geq H$

④ $H \geq G \geq A$　　⑤ $H \geq A \geq G$

해설

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\therefore A \geq G \cdots$ ㉠

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(x+y) \geq 2xy$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$

$\therefore G \geq H \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $A \geq G \geq H$

18. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

② $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

③ $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

④ $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

⑤ $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$a>0$, $b>0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a=b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

19. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{3}{y}\right)\left(3y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0$, $y>0$이므로 산술기하평균의 관계에 의해

$$(\text{준식}) = 3xy+1+9+\frac{3}{xy} \geq 2\cdot\sqrt{3xy\cdot\frac{3}{xy}}+10$$
$$= 2\cdot 3+10 = 16$$

20. $a>0,\ b>0$일 때, $(a+b)\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 13 ② 24 ③ 25 ④ 28 ⑤ 36

해설

$a>0,\ b>0$이므로 산술기하평균의 관계로부터

$(a+b)\cdot\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)=4+\dfrac{9a}{b}+\dfrac{4b}{a}+9$

$\dfrac{9a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{9a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=2\cdot 6=12$

$\therefore (a+b)\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)\geq 12+13=25$

21. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$

$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$

22. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$

23. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$ 원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원

④ 9000원 ⑤ 10000원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

(총 비용) $= 250\left(\frac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$

$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$

$\geq 2\sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$

$= 2 \times 5000 - 1000$

$= 10000 - 1000 = 9000$

24. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$xy = 8 \cdots$ ㉠
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.
$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.
$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

25. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x - 2y + 3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x - 2y + 3z)^2$

$= \left\{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right\}$

$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x - 2y + 3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$

즉, $x = -y = \pm 2$일 때 등식이 성립한다.

26. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

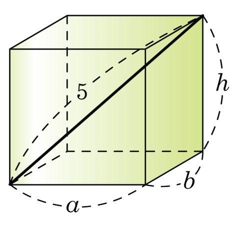
$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

27. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$　⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$의 최댓값

　: $20\sqrt{3}$

28. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots\ (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ ㈎ $\cdots (B)$이므로
$H =$ ㈏이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ ㈏이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 ㈐ 조건은
$a \neq b$이고 $H =$㈏이다.

위의 증명에서 ㈎ , ㈏ , ㈐에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\ \ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \ \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\ \ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \ \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore\ \frac{a-H}{a} =$ ㈎ $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ ㈏ $\frac{2ab}{a+b}$

따라서 ㈐ 필요충분조건

29. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x분씩 늘어나며 y명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
y명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로
$10x + 2y \le 60 \cdots$ ㉠
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
$10x + 2y \ge 2\sqrt{10x \cdot 2y}$
$10x + 2y \ge 2\sqrt{20xy} \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\sqrt{20xy} \le 60,\ 20xy \le 900$
$\therefore xy \le 45$
따라서 xy의 최댓값은 45이다.

30. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x\cdots$㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2\cdots$㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2) \geq (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \leq 0$
$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$
따라서 $M=2,\ m=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=3$

31. 다음의 Ⅰ, Ⅱ에서 p가 q이기 위한 충분조건이면 1, 필요조건이면 3, 필요충분조건이면 7, 아무 조건도 아니면 0의 값을 주기로 하자.

> Ⅰ. p : $ab < 0$
> q : 두 부등식 $a > b$, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$이 동시에 성립한다.
> Ⅱ. p : $a + b - 1 < 0$
> q: 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖는다.

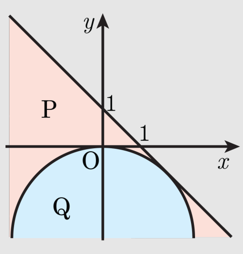
a, b가 실수일 때, Ⅰ, Ⅱ에 주어지는 두 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

Ⅰ. q의 두 부등식이 동시에 성립하기 위해서는



$a - b > 0$이고 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$에서 $ab < 0$이고

$a > b$이므로

$a > 0$, $b < 0$

역으로, $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이고

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

즉, 두 부등식이 동시에 성립하기 위한 필요충분조건은 $a > 0$, $b < 0$이다.

그런데 $ab < 0 \Leftrightarrow (a < 0,\ b > 0)$ 또는 $(a > 0,\ b < 0)$이므로

p는 q이기 위한 필요조건이다.

Ⅱ. 이차방정식 $x^2 - ax - b = 0$이 허근을 갖기 위한 필요충분조건은

$D = a^2 + 4b < 0$, $P = \{(a,\ b) | a + b - 1 < 0\}$

$Q = \{(a,\ b) | a^2 + 4b < 0\}$라 놓고 두 집합을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다. 즉, $Q \subset P$

따라서, p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서, 구하는 두 값의 합은 6이다.

32. 세 양수 x, y, z가 $x+y+z=1$을 만족할 때, $\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)$의 최소값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 125

해설

(준식)$= 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz}$

$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xyz}$ 이므로

(준식)$= 8+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3}{xyz}$

$x+y+z=1$ 이므로

$\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}\geq 3\sqrt{xyz}$

$\left(\text{등호는 } x=y=z=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ xyz\leq\frac{1}{27}\quad\therefore\ \frac{1}{xyz}\geq 27\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 9\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 (준식)$\geq 8+36+81=125$

33. 1, 3, 5, 7, 9를 임의로 순서를 바꾸어 배열한 수열을 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 라고 할 때, $a+3b+5c+7d+9e$의 최솟값은?

① 83　　② 85　　③ 87　　④ 89　　⑤ 91

해설

$a+3b+5c+7d+9e$
$=(10-9)a+(10-7)b+(10-5)c+(10-3)d+(10-1)e$
$=10(a+b+c+d+e)-(9a+7b+5c+3d+e)$
$=10\times 25-(9a+7b+5c+3d+e)$
여기서 코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(9^2+7^2+5^2+3^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\geq (9a+7b+5c+3d+e)^2$
$(9a+7b+5c+3d+e)\leq (1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)$이고
등호는 $\frac{a}{9}=\frac{b}{7}=\frac{c}{5}=\frac{d}{3}=\frac{e}{1}$일 때, 성립한다.
$\therefore\ a+3b+5c+7d+9e\geq 10\times 25-(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)=250-(165)=85$
따라서, $a=9,\ b=7,\ c=5,\ d=3,\ e=1$일 때,
준식은 최솟값 85를 갖는다.

해설

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$가 자연수이므로
$a=9,\ b=7,\ c=5,\ d=3,\ e=1$일 때
준식은 최소가 된다.